ENCYCLOPÉDIE
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DES ACADÉMIES DES SCIENCES DE GÖTTINGUE, DE LEIPZIG, DE MUNICH ET DE VIENNE AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

ÉDITION FRANÇAISE

RÉDIGÉE ET PUBLIÉE D'APRÈS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

JULES MOLK,
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE NANCY.

TOME III (QUATRIÈME VOLUME),

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE DANS L'ESPACE.

ÉDITIONS
JACQUES GABAY

Abréviations.

Dans les publications de l'académie des sciences de Paris, H. signifie **Histoire** M. signifie mémoires.

I_3 = renvoi au tome premier; troisième volume.

(I 2, 19) = renvoi au tome premier, article 2, numéro 19.

Dans les Notes, un nombre α en exposant indique un renvoi à la note α du même article.

(2) 8 (1812), éd. 1816, p. 57 [1810] = deuxième série, tome ou volume 8, année 1812, édité en 1816, page 57, lu ou signé en 1810.

La transcription des lettres russes a lieu conformément à l'orthographe tchèque.

En particulier *č* se prononce *tch*, *c* se prononce *tz*, *š* se prononce comme *ch* dans *chat*, *ž* se prononce comme notre *j* dans *je*, *j* se prononce comme notre *y* dans *essayer*.

Abh. = Abhandlungen.
Acad. = Academie.
Accad. = Accademia.
Akad. = Akademie.
Alg. = Algèbre, Algebra.
Allg. = Allgemeine.
Amer. = American.
Ann. = Annalen, Annales, Annali.
Anw. = Anwendung.
appl. = appliqué.
arit. = aritmetica.
arith. = Arithmetik, arithmétique.
assoc. = association.
Aufs. = Aufsätze.
Avanc. = Avancement.
Ber. = Berichte.
Bibl. Congrès = bibliothèque du Congrès.
Bibl. math. = Bibliotheca mathematica.
Brit. = British.
Bull. = Bulletin.
Bull. bibl. = Bulletino bibliografico.
cah. = cahier.
Cambr. = Cambridge.
car. = carton.
cf. = comparez.
chap. = chapitre.
chim. = chimie, chimique.
circ. = circolo.
circul. = circular.
col. = colonne.
Comm. = Commentarii.
Commentat. = Commentationes.
Corresp. = Correspondance.
C. R. = Comptes rendus.
déf. = définition.
Denkschr. = Denkschriften.
Diss. = Dissertation.
Ec. = Ecole.
éd. = édité à, édité par, édition.
Edinb. = Edinburgh.
Educ. = Educational.
elem. = elementare.
élém. = élémentaire.
ex. = exemple.
extr. = extrait.
fasc. = fascicule.
fig. = figure.
fis. = fisica.
fol. = folio.
Géom. = Géométrie.
Ges. = Gesellschaft.
Gesch. = Geschichte.
Giorn. = Giornale.
Gött. = Göttingen, Göttingue.
Gymn. = Gymnasium.
Hist. = Histoire.
id. = idem, ibidem.
imp. = imprimé.
inscr. = inscription.
inst. = institution.
interméd. = intermédiaire.
intern. = international.
introd. = introduction.
Ist. = Istituto.
J. = Journal.
Jahresb. = Jahresbericht.
Lehrb. = Lehrbuch.
Leop. = Leopoldina.
Lpz., Lps. = Leipzig.
Mag. = Magazine.
Méc. = Mécanique.
med. = medicinisch.
Mém. = Mémoire.
métaph. = métaphysique.
Mitt. = Mitteilung.
Monatsh. = Monatshefte.
Monatsb. = Monatsberichte.
ms., mss. = manuscrit, manuscrits.
Nachr. = Nachrichten.
nat. = naturelle.
naturf. = naturforschende.
naturw. = naturwissenschaftlich.
norm. = normale.
nouv. = nouveau, nouvelle.
num. = numérique.
numism. = numismatique.
Op. = Opera.
Opusc. = Opuscule.
Overs. = Oversight.
p. = page.
p. ex., par ex. = par exemple.
partic. = particulier.
Petrop., Pétersb. = Saint Pétersbourg.
philol. = philologie.
philom. = philomatique.
philos. = philosophique.
phys. = physique.
pl. = planche.
polyt. = polytechnique.
pontif. = pontificia.
posth. = posthume.
Proc. = Proceeding.
progr. = programme.
prop. = proposition.
publ. = publié.
Quart. = Quarterly.
R. = reale, royal.
Recent. = Recentiores.
Rendic. = Rendiconto.
réimp. = réimprimé.
sc. = sciences.
Schr. = Schriften.
scient. = scientifique.
s. d. = sans date.
sect. = section.
Selsk. = Selskabs.
sign. = signature.
Sitzgsb. = Sitzungsberichte.
s. l. = sans lieu.
spéc. = spéciale.
suiv. = suivante.
sup. = supérieure.
suppl. = supplément.
soc. = société.
theor. = theoretische.
trad. = traduction.
Trans. = Transactions.
Unterh. = Unterhaltung.
Ver. = Vereinigung.
Verh. = Verhandlung.
Vetensk. = Vetenskabs.
Viertelj. = Vierteljahresschrift.
vol. = volume.
Vorles. = Vorlesung.
Wiss. = Wissenschaft, wissenschaftlich.
Z. = Zeitschrift.

LES GRANDS CLASSIQUES GAUTHIER-VILLARS

ENCYCLOPÉDIE

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DES ACADÉMIES DES SCIENCES
DE GÖTTINGUE, DE LEIPZIG, DE MUNICH ET DE VIENNE
AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

ÉDITION FRANÇAISE

RÉDIGÉE ET PUBLIÉE D'APRÈS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

JULES MOLK,
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE NANCY.

TOME III (QUATRIÈME VOLUME),

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE DANS L'ESPACE.

ÉDITIONS
JACQUES GABAY

Avis.

Dans l'édition française, on a cherché à reproduire dans leurs traits essentiels les articles de l'édition allemande; dans le mode d'exposition adopté, on a cependant largement tenu compte des traditions et des habitudes françaises.

Cette édition française offrira un caractère tout particulier par la collaboration de mathématiciens allemands et français. L'auteur de chaque article de l'édition allemande a, en effet, indiqué les modifications qu'il jugeait convenable d'introduire dans son article et, d'autre part, la rédaction française de chaque article a donné lieu à un échange de vues auquel ont pris part tous les intéressés; les additions dues plus particulièrement aux collaborateurs français sont mises entre deux astérisques.

Réimpression autorisée de l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées,* publiée par fascicules entre 1904 et 1916 par Gauthier-Villars et B.G. Teubner.

La publication de l'édition française a été définitivement interrompue en 1916 en raison de la guerre.

Cette réédition a été réalisée avec des volumes obligeamment prêtés par les Bibliothèques de l'École Normale Supérieure, de l'École Polytechnique et du Conservatoire National des Arts et Métiers.
De précieuses épreuves, aimablement confiées par M. Jean-Luc Verley, Maître de conférences à l'Université de Paris VII, ont permis de compléter l'article *Fonctions analytiques* écrit par W.F. Osgood, P. Boutroux et J. Chazy, et de terminer l'article *Développements concernant l'hydrodynamique* écrit par A.E.H. Love, P. Appell, H. Beghin et H. Villat.
Nous sommes particulièrement reconnaissants à la Bibliothèque de l'Institut Henri Poincaré, ainsi qu'à Mlle Karine Chemla, Chercheur au C.N.R.S., de nous avoir fourni de très utiles renseignements bibliographiques.
Nous adressons à tous nos plus sincères remerciements.

Tome III, volume 4 ISBN 2-87647-113-2
ISSN 0989-0602

ENCYCLOPÉDIE

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DES ACADÉMIES DES SCIENCES
DE GÖTTINGUE, DE LEIPZIG, DE MUNICH ET DE VIENNE
AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

ÉDITION FRANÇAISE

RÉDIGÉE ET PUBLIÉE D'APRÈS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

JULES MOLK,
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE NANCY.

TOME III (QUATRIÈME VOLUME),

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE DANS L'ESPACE.

RÉDIGÉ DANS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

FRANÇOIS MEYER,
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE KÖNIGSBERG.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET C^{IE}.

LEIPZIG
B. G. TEUBNER

ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

TABLE DES MATIÈRES
des 7 premiers Tomes

Volume 2 — Fonctions de variables complexes

fasc. 1 – 23 mai 1911	II-7	Analyse algébrique **A. Pringsheim – G. Faber – J. Molk**	1-93
	II-8	Fonctions analytiques *(à suivre)* **W.F. Osgood – P. Boutroux – J. Chazy**	94-96
épreuve – 10 août 1912	II-8	*(suite)**	97-128

Volume 3 — Équations différentielles ordinaires

fasc. 1 – 22 février 1910	II-15	Existence de l'intégrale générale **P. Painlevé**	1-57
	II-16	Méthodes d'intégration élémentaires **E. Vessiot**	58-170

Volume 4 — Équations aux dérivées partielles

fasc. 1 – 30 juin 1913	II-21	Propriétés générales des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Équations linéaires du premier ordre. **E. von Weber – G. Floquet**	1-55
	II-22	Équations non linéaires du premier ordre. Équations d'ordre plus grand que un. **E. von Weber – E. Goursat**	56-160
fasc. 2 – 17 mars 1916	II-23	Groupes de transformations continus* **H. Burkhardt – L. Maurer – E. Vessiot**	161-240

Volume 5 — Développements en séries

fasc. 1 – 31 mars 1912	II-26	Équations et opérations fonctionnelles **S. Pincherle**	1-81
	II-27	Interpolation trigonométrique **H. Burkhardt – E. Esclangon**	82-153
	II-28	Fonctions sphériques *(à suivre)* **A. Wangerin – A. Lambert**	154-160
fasc. 2 – 12 février 1914	II-28	*(suite et fin)*	161-230
	II-28a	Généralisations diverses des fonctions sphériques **P. Appell – A. Lambert**	231-268

Volume 6 — Calcul des variations. Compléments

fasc. 1 – 15 septembre 1913	II-31	Calcul des variations *(à suivre)* **A. Kneser – E. Zermelo – H. Hahn – M. Lecat**	1-128
fasc. 2 – 16 juin 1916	II-31	*(suite et fin)*	129-288

Tome III — GÉOMÉTRIE

Volume 1 — Fondements de la géométrie. Géométrie générale

fasc. 1 – 30 mars 1911	III-1	Principes de la géométrie **F. Enriques**	1-147
	III-1a	Notes sur la géométrie non-archimédienne **A. Schoenflies**	148-151
	III-2	Les notions de ligne et de surface *(à suivre)* **H. von Mangoldt – L. Zoretti**	152-160
fasc. 2 – 8 juillet 1915	III-2	*(suite et fin)*	161-184
	III-3	Exposé parallèle du développement de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique pendant le XIXᵉ siècle **G. Fano – S. Carrus**	185-259
	III-4	Géométrie énumérative **H.G. Zeuthen – M. Pieri**	260-331
Elie Cartan, *Œuvres complètes* Partie III, Vol. 2, G.-V., 1955	III-5	La théorie des groupes continus et la géométrie **G. Fano – E. Cartan**	1-135

Volume 2 — Géométrie descriptive. Géométrie élémentaire

fasc. 1 – 23 décembre 1913	III-8	Géométrie projective **A. Schoenflies – A. Tresse**	1-143
	III-9	Configurations* **E. Steinitz – E. Merlin**	144-160

Volume 3 — Géométrie algébrique plane

fasc. 1 – 25 juin 1911	III-17	Coniques *(à suivre)* **F. Dingeldey – E. Fabry**	1-160
fasc. 2 – 3 août 1915	III-17	*(suite et fin)*	161-162
	III-18	Systèmes de coniques **F. Dingeldey – E. Fabry**	163-256
	III-19	Théorie générale des courbes planes algébriques* **L. Berzolari**	257-304

Volume 4 — Géométrie algébrique dans l'espace

fasc. 1 – 28 avril 1914	III-22	Quadriques **O. Staude – A. Grévy**	1-164

Tome IV — MÉCANIQUE

Volume 1 — Généralités. Historique

fasc. 1 – 15 mars 1915	IV-1	Principes de la mécanique rationnelle **A. Voss – E. Cosserat – F. Cosserat**	1-187
	IV-2	Mécanique statistique **P. Ehrenfest – T. Ehrenfest – E. Borel**	188-292

Volume 2 — Mécanique générale

fasc. 1 – 22 mai 1912	IV-4	Fondements géométriques de la statique **H.E. Timerding – L. Lévy**	1-144
	IV-5	Géométrie des masses **G. Jung – E. Carvallo**	145-210
	IV-6	Cinématique *(à suivre)* **A. Schoenflies – G. Koenigs**	211-224
fasc. 2 – 11 avril 1916	IV-6	*(suite)**	225-304

Volume 5 — Systèmes déformables

fasc. 1 – 31 juillet 1912	IV-16	Notions géométriques fondamentales **M. Abraham – P. Langevin**	1-60
	IV-17	Hydrodynamique *(à suivre)* **A.E.H. Love – P. Appell – H. Beghin**	61-96
fasc. 2 – 4 mars 1914	IV-17	*(suite et fin)*	97-101
	IV-18	Développements concernant l'hydrodynamique *(à suivre)* **A.E.H. Love – P. Appell – H. Beghin – H. Villat**	102-208
épreuve – 29 novembre 1913	IV-18	*(suite et fin)*	209-211

Volume 6 — Balistique. Hydraulique

fasc. 1 – 25 novembre 1913	IV-21	Balistique extérieure **C. Cranz – E. Vallier**	1-105
	IV-22	Balistique intérieure **C. Cranz – C. Benoît**	106-150
	IV-22a	Développements concernant quelques recherches de balistiques exécutées en France **F. Gossot – R. Liouville**	151-191
	IV-23	Hydraulique* **Ph. Forchheimer – A. Boulanger**	192

Tome V — PHYSIQUE

Volume 1 — Thermodynamique

fasc. 1 – 15 février 1916	V-1	La mesure **C. Runge – Ch.Ed. Guillaume**	1-64

Volume 2 — Physique moléculaire

fasc. 1 – 2 novembre 1915	V-6	Histoire des conceptions fondamentales de l'atomistique en chimie **F.W. Hinrichsen – M. Joly – J. Roux**	1-36
	V-7	Stéréochimie **L. Mamlock – J. Roux**	37-65
	V-7a	Considérations sur les poids atomiques **E. Study – J. Roux**	66-71
	V-8	Cristallographie* **Th. Liebisch – F. Wallerant**	72-96

Volume 3 — Principes physiques de l'Électricité

fasc. 1 – 19 mai 1916	V-14	Actions à distance **R. Reiff – A. Sommerfeld – E. Rothé**	1-76

Volume 4 — Principes physiques de l'Optique

fasc. 1 – 7 décembre 1915	V-17	Anciennes théories de l'optique **A. Wangerin – C. Raveau**	1-104

Tome VI — GÉODÉSIE ET GÉOPHYSIQUE

Volume 1 — Géodésie

fasc. 1 – 7 septembre 1915	VI-1	Triangulation géodésique **P. Pizzetti – H. Noirel**	1-101
	VI-2	Bases et nivellement **P. Pizzetti – H. Noirel**	102-176
	VI-3	Déviations de la verticale* **P. Pizzetti – H. Noirel**	177-224

Volume 2 — Géophysique

fasc. 1 25 juillet 1916	VI-8	Marées océaniques et marées internes* **G.H. Darwin – S.S. Hough – E. Fichot**	1-96

Tome VII — ASTRONOMIE

Volume 1 — Astronomie sphérique

fasc. 1 – 1er août 1913	VII-1	Système de référence et mesure du temps **E. Anding – H. Bourget**	1-13
	VII-2	Réfraction et extinction **A. Bemporad – P. Puiseux**	14-67
	VII-3	Réduction des observations astronomiques **F. Cohn – E. Doublet – L. Picart**	68-138
	VII-4	Détermination de la longitude et de la latitude *(à suivre)* **C.W. Wirtz – G. Fayet**	139-224
fasc. 2 – 4 janvier 1916	VII-4	*(suite et fin)*	225-232
	VII-5	Les horloges **C.Ed. Caspari**	233-271
	VII-6	Théorie des instruments astronomiques de mesures angulaires, des méthodes d'observation et de leurs erreurs* **F. Cohn – J. Mascart**	272-320

* *La fin de l'article n'a pas été publiée en raison de la guerre.*

III 22. QUADRIQUES.

Exposé, d'après l'article allemand de **O. STAUDE** (Rostock)
par **A. GRÉVY** (Paris).

Introduction. Plan et ligne droite.

1. Coordonnées. *L'idée d'employer trois coordonnées pour déterminer la position des points dans l'espace remonte à *R. Descartes*[1]) bien qu'il n'ait pas appliqué cette idée à la représentation des surfaces courbes.

F. van Schooten[2]) a exposé les propriétés de certaines courbes planes, tracées sur une surface particulière, qui lui avaient été communiquées par *J. Hudde*; mais, ces courbes étant planes, il a pu éviter de faire usage de plus de deux coordonnées.

En 1698 *Jean Bernoulli*[3]) s'est presque certainement servi de trois coordonnées pour obtenir les équations différentielles des lignes géodésiques tracées sur certains types de surfaces.*

---

1) *La Géométrie, Leyde 1637, fin du livre 2; Œuvres, éd *Ch. Adam* et *P. Tannery* 6, Paris 1902, p. 440. *R. Descartes* propose de prendre deux plans qui se coupent à angle droit et de déterminer la position d'un point de l'espace au moyen de la ligne d'intersection des deux plans et de deux perpendiculaires à cette ligne d'intersection menées à partir d'un point de cette ligne dans les deux plans. La ligne d'intersection des deux plans est l'axe des x. L'idée de *R. Descartes* revient à déterminer une courbe à double courbure par l'intersection des deux cylindres la projetant orthogonalement sur les deux plans donnés.*

2) *Exercitationes mathematicae, Leyde 1656/7, livre 5, p. 475/7; éd. hollandaise, Amsterdam 1659, p. 443/8.*

3) *Lettre de *Jean Bernoulli* à *G. W. Leibniz* datée du 16/26 août 1698; *G. W. Leibniz*, Werke, éd. *C. I. Gerhardt*, Math. Schr. 3, Halle 1855/6, p. 532. *G. W. Leibniz* [Specimen geometriae luciferae (mém. posth.); Werke, éd. *C. I. Gerhardt*, Math. Schr. 7, Halle 1863, p. 291, 299] a signalé lui-même la représentation d'une surface par une équation et celle d'une courbe gauche par deux équations entre trois coordonnées. Voir aussi la lettre de *Jean Bernoulli* à *G. W. Leibniz* datée du 6 février 1715; *G. W. Leibniz*, Werke, éd. *C. I. Gerhardt*, Math. Schr. 3, Halle 1855/6, p. 938 (Texte et notes 1 à 3 de *G. Eneström*).*

*Mais *A. Parent*[4]) est le premier géomètre qui, dans un écrit imprimé, ait fait usage d'un système de trois coordonnées pour représenter un point de l'espace. Dans cet écrit, dont le contenu avait été lu à l'Académie des sciences en 1700, il donne déjà l'équation de la sphère rapportée à son centre.*

*En 1729 *L. Euler*[5]) se sert de trois coordonnées pour représenter une surface courbe quelconque et il fait observer que deux équations entre les trois coordonnées représentent une courbe dans l'espace.*

*Vers la même époque *A. C. Clairaut*[6]) a donné de son côté d'une façon précise la définition des coordonnées d'un point; il a montré, lui aussi, qu'une surface peut être représentée par une équation, et une ligne par l'ensemble de deux équations, faits qu'il a été le premier à publier. La notion de degré d'une surface algébrique est due à *L. Euler*[7]).

Définir un point par l'ensemble de ses coordonnées rectilignes, c'est lui faire correspondre[8]) d'une façon univoque un système de trois plans parallèles aux plans coordonnés; *G. Lamé*[9]) a généralisé cette notion et a montré tout le parti que l'on peut tirer de l'emploi de coordonnées curvilignes, dont les plus simples sont les coordonnées sphériques[10]) et les coordonnées cylindriques.

E. Bobillier[11]) a donné un nouveau développement à la conception cartésienne en imaginant d'associer à un point, non plus un système

4) *Recherches de math. et de phys., Paris 1705 (en 2 vol.); (2e éd. en 3 vol.) Essais et recherches de mathématique et physique 2, Paris 1713, p. 181.*

5) *Lettre à *Jean Bernoulli* datée du 18 février 1729; Bibl. math. (3) 4 (1903), p. 355/6; cf. Comm. Acad. Petrop. 3 (1728), éd. 1732, p. 111/2 (Texte et note 5 de *G. Eneström*).*

6) *Recherches sur les courbes à double courbure, Paris 1731, p. 7.*

7) *Introductio in analysin infinitorum 2, Lausanne 1748, p. 370; Introduction à l'analyse infinitésimale, traduction *J. B. Labey* 2, Paris an V, p. 374. *L. Euler* se sert du mot *ordo* (*ordre*).*

8) *Cette correspondance repose en dernière analyse sur le postulat de la continuité. Le rôle que joue ce postulat est étudié dans l'article III 1, n° **13**. Pour la bibliographie concernant ce postulat on peut consulter *O. Staude*, Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene, Leipzig et Berlin 1905, p. 422.*

9) **Ch. Dupin*, Développements de géométrie, Paris 1813, p. 20; *G. Lamé*, Leçons sur les coordonnées curvilignes, Paris 1859, p. 7, 52/6.*

10) **N. Fuss* [Nova Acta Acad. Petrop. 3 (1785), éd. 1788, p. 90/9] a déjà fait usage de coordonnées sphériques. Voir aussi *J. L. Lagrange*, Nouv. Mém. Acad. Berlin 4 (1773), éd. 1775, p. 127; Œuvres 3, Paris 1869, p. 626 (Note de *G. Eneström*).*

11) *Ann. math. pures appl. 18 (1827/8), p. 321.*

de trois coordonnées, mais un système de quatre, cinq, ... coordonnées liées entre elles par certaines relations qui, dans un grand nombre de questions, n'interviennent pas. On peut rattacher à ce développement de la conception cartésienne de *E. Bobillier* les coordonnées barycentriques de *A. F. Möbius*[12]), les coordonnées tétraédriques qui comprennent les précédentes et dont l'exposé systématique est dû à *J. Plücker*[13]), enfin les coordonnées polyédriques dont *P. Serret*[14]) a fait un usage constant.

Ces divers systèmes de coordonnées seront étudiés dans plusieurs articles de l'Encyclopédie. Nous nous contenterons de rappeler ici que les coordonnées tétraédriques x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point quelconque P peuvent être envisagées comme proportionnelles aux rapports

$$\frac{p_1}{p_1'},\quad \frac{p_2}{p_2'},\quad \frac{p_3}{p_3'},\quad \frac{p_4}{p_4'}$$

des distances (affectées d'un signe) p_1, p_2, p_3, p_4 du point P aux quatre plans d'un tétraèdre de référence, aux distances p_1', p_2', p_3', p_4' à ces mêmes plans d'un point fixe U_0 auquel on a donné le nom de point-unité.

Les coordonnées barycentriques du point P sont les coordonnées tétraédriques de P dans le cas où U_0 est le centre des distances proportionnelles [n° **4**] des quatre sommets du tétraèdre de référence affectés de coefficients donnés [cf. III 17, **15**].

Les coordonnées polyédriques sont une généralisation des coordonnées tétraédriques dans laquelle on envisage, au lieu d'un tétraèdre, un polyèdre de référence.

Les coordonnées homogènes[15]) x', y', z', t' d'un point P, coordonnées dont les rapports sont liés aux coordonnées cartésiennes x, y, z de P par les relations

$$x = \frac{x'}{t'},\quad y = \frac{y'}{t'},\quad z = \frac{z'}{t'},$$

peuvent être envisagées comme un cas limite de coordonnées tétraédriques, celui pour lequel un des plans du tétraèdre de référence s'éloigne indéfiniment tandis que les trois autres plans restent fixes[16]).

12) *Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827, p. 32 et suiv ; Werke 1, Leipzig 1885, p. 50 et suiv. Cf. *O. Staude*, Analyt. Geom. der Ebene[8]), p. 435/6.*

13) *J. reine angew. Math. 5 (1830), p. 1 [1829]; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 126.*

14) *Géométrie de direction, Paris 1869.*

15) **L. O. Hesse*, J. reine angew. Math. 20 (1840), p. 291; Werke, Munich 1897, p. 35; *J. Plücker*, Philos. Trans London 155 (1865), p. 774; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 525.*

16) *C'est *L. O. Hesse* [J. reine angew. Math. 28 (1844), p. 104; Werke,

Convenons, pour un instant, de désigner par x, y, z, t (au lieu de x', y', z', t') les coordonnées homogènes d'un point P. On a manifestement entre les coordonnées tétraédriques x_1, x_2, x_3, x_4 du point P et ses coordonnées homogènes x, y, z, t des relations de la forme

$$\begin{aligned}\varrho x_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t,\\ \varrho x_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t,\\ \varrho x_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t,\\ \varrho x_4 &= a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 t,\end{aligned}$$

où les a_i, b_i, c_i, d_i sont des constantes et ϱ un facteur de proportionnalité. On peut aussi mettre ces relations sous la forme

$$\begin{aligned}\sigma x &= A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4,\\ \sigma y &= B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3 + B_4 x_4,\\ \sigma z &= C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + C_4 x_4,\\ \sigma t &= D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 + D_4 x_4,\end{aligned}$$

où les A_i, B_i, C_i, D_i sont des constantes et σ un facteur de proportionnalité. Pour $i = 1, 2, 3, 4$ les constantes A_i, B_i, C_i, D_i sont d'ailleurs les coefficients de a_i, b_i, c_i, d_i dans le développement du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

suivant la $i^{\text{ième}}$ ligne.

Pour $i = 1, 2, 3, 4$ les constantes A_i, B_i, C_i, D_i sont les coordonnées homogènes du sommet S_i du tétraèdre fondamental; les coordonnées homogènes du point-unité U_0 sont

$$\begin{aligned}&A_1 + A_2 + A_3 + A_4,\\ &B_1 + B_2 + B_3 + B_4,\\ &C_1 + C_2 + C_3 + C_4,\\ &D_1 + D_2 + D_3 + D_4.^*\end{aligned}$$

Coordonnées binaires. La généralisation successive de la notion de coordonnée se reflète déjà dans celle de coordonnée *d'un point d'une droite donnée.*

Munich 1897, p. 132; Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, (3ᵉ éd.) revue et complétée par *S. Gundelfinger*, Leipzig 1876, p. 67, 227] qui a mis en pleine lumière le rôle fondamental que jouent les coordonnées homogènes en géométrie.*

Soient, sur la droite donnée, S_1 et S_2 deux points arbitrairement fixés devant jouer le rôle des deux *sommets* d'un système de *coordonnées binaires* et U_0 un troisième point arbitrairement fixé devant jouer le rôle du point-unité. On appelle *coordonnées binaires* x_1, x_2 d'un point quelconque P de la droite donnée deux nombres x_1 et x_2 dont le rapport est égal au rapport anharmonique

$$(S_1, S_2, U_0, P),$$

en sorte que l'on a

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{S_1 U_0}{S_2 U_0} : \frac{S_1 P}{S_2 P}. \tag{1}$$

Les coordonnées binaires des points S_1, S_2, U_0 sont respectivement

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, & x_2 &= 0,\\ x_1 &= 0, & x_2 &= 1,\\ x_1 &= 1, & x_2 &= 1.\end{aligned}$$

Si, sur la droite donnée, on fixe une origine O et un sens positif et si

$$s_1, s_2, u_0, x$$

sont les abscisses des points

$$S_1, S_2, U_0, P,$$

on a manifestement

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{s_1 - u_0}{s_2 - u_0} : \frac{s_1 - x}{s_2 - x} \tag{2}$$

ou, ce qui est équivalent,

$$x = \frac{(s_2 - u_0)\, s_1 x_1 - (s_1 - u_0)\, s_2 x_2}{(s_2 - u_0)\, x_1 - (s_1 - u_0)\, x_2}. \tag{3}$$

Si l'on prend en particulier le point-unité U_0 au milieu du segment $S_1 S_2$, en sorte que

$$u_0 = \frac{s_1 + s_2}{2},$$

on a

$$x = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2}{x_1 + x_2},$$

et les coordonnées binaires se réduisent aux coordonnées barycentriques de *A. F. Möbius*[17]).

Si l'on prend

$$s_1 = \infty, \quad s_2 = 0, \quad u_0 = 1,$$

on a

$$x = \frac{x_1}{x_2}$$

et l'on retombe sur les coordonnées cartésiennes.

17) Der baryc. Calcul[12]), § 21, 29; Werke 1, p. 44, 51. Cf. *O. Staude,* Analyt. Geom. der Ebene[8]), p. 35.

Si l'on met x sous la forme homogène $\frac{x}{t}$ on déduit des relations (2) et (3), en continuant à désigner par ϱ et σ des facteurs de proportionnalité,

$$\varrho x_1 = a_1 x + b_1 t,$$
$$\varrho x_2 = a_2 x + b_2 t$$

et

$$\sigma x = b_2 x_1 - b_1 x_2,$$
$$\sigma t = - a_2 x_1 + a_1 x_2.$$

2. *Paramètres directeurs. Les paramètres directeurs d'une droite dirigée sont les projections sur les axes du vecteur $+1$ porté sur cette droite, les projections étant faites parallèlement aux plans coordonnés. Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, les paramètres directeurs sont les cosinus des angles formés par la demi-droite positive avec les axes; on les appelle *cosinus directeurs*[18]).

Les paramètres directeurs[19]) a, b, c d'une droite dirigée sont liés aux angles λ, μ, ν des axes (Oy, Oz), (Oz, Ox), (Ox, Oy) par la relation[20])

$$\varphi(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos\lambda + 2ca\cos\mu + 2ab\cos\nu = 1.$$

Les angles α, β, γ d'une droite dirigée avec les axes coordonnés sont liés par une relation un peu plus compliquée.

Le discriminant[21]) [I 16, **32**]

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

de la forme $\varphi(a, b, c)$ joue un rôle important dans un grand nombre de questions; on peut le mettre sous la forme[22])

$$D = 4\sin\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\sin\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\sin\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\sin\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}.$$

18) *On les rencontre dans *Ch. L. Tinseau d'Amondans* [Mém. présentés Acad. sc. Paris (1) 9 (1780), p. 593/624 [1774]] et dans *G. Monge* [J. Ec. polyt. (1) cah. 11 (an X), p. 130].*

19) **G. Monge*, J. Ec. polyt. (1) cah. 11 (an X), p. 130; *L. N. M. Carnot*, Essai sur la théorie des transversales, Paris 1806, p. 64 [publié à la suite du Mémoire sur la relation[24])].*

20) **Ch. Brisse*, Nouv. Ann. math. (3) 1 (1882), p. 207; *E. Pruvost*, Leçons de géométrie analytique (2e éd.) 2, Paris 1887, p. 10.*

21) **Ch. A. A. Briot* et *J. C. Bouquet*, Leçons de géométrie analytique, (16e éd. revue par *P. Appell*), Paris 1897, p 511; *E. Pruvost*, Géom. analyt.[20]) 2, p. 11; *B. Niewenglowski*, Cours de géométric analytique 3, Paris 1896, p. 14; *E. d'Ovidio*, Geometria analitica, Turin 1896, p. 154; (3e éd.) Turin 1903, p. 112.*

22) **G. Monge*, Correspondance sur l'Ec. polyt. 2 (1809/13), p. 5.*

La quantité $\sqrt{D}$ est le volume du parallélépipède dont trois arêtes de longueur 1 sont dirigées suivant les axes; on l'appelle le *sinus solide* ou le *sinus du trièdre* $Oxyz$[23]).

L'angle V de deux demi-droites, dont les paramètres directeurs sont (a, b, c) et (a', b', c'), est donné par la relation

$$(1)\quad \cos V = aa' + bb' + cc' + (bc' + cb')\cos\lambda + (ca' + ac')\cos\mu + (ab' + ba')\cos\nu$$

que l'on écrit symboliquement, afin d'abréger,

$$(1')\qquad \cos V = \sum aa' + \sum (bc' + cb')\cos\lambda.$$

Si (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont les angles de ces demi-droites avec les axes, leur angle V est donné par l'équation

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\alpha \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\beta \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' & \cos V \end{vmatrix} = 0.$$

On peut donner à $\cos V$ différentes formes déduites de la forme $\varphi(a, b, c)$ ou de son adjointe

$$F(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & a \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & b \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

Les relations (1) et (2) dans lesquelles on suppose $\cos V = 0$ fournissent la condition d'orthogonalité de deux droites.*

3. *Transformation des coordonnées. Si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées de la nouvelle origine, (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'') les paramètres directeurs des nouveaux axes $O'x'y'z'$, les formules de transformation[24]) sont[25])

$$x = x_0 + ax' + a'y' + a''z',$$
$$y = y_0 + bx' + b'y' + b''z',$$
$$z = z_0 + cx' + c'y' + c''z'.$$

23) *Ce nom est dû à *K. G. Chr. von Staudt*, J. reine angew. Math. 24 (1842), p. 255.*

24) *Elles figurent d'abord dans *Livet* [J. Ec. polyt. (1) cah. 13 (1806), p. 270] qui les envisage seulement dans le cas où le système d'axes primitifs est rectangulaire. Dans le cas où, en outre, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, on les rencontre déjà dans *L. N. M. Carnot*, Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace, Paris 1806, p. 63.*

25) *Dans le cas où les deux systèmes sont obliques et ont même origine,

Si les deux systèmes d'axes sont rectangulaires, le déterminant des coefficients[26]) de x', y', z' est égal à $+1$ ou à -1[27]), suivant que les trièdres $Oxyz$, $O'x'y'z'$ ont ou n'ont pas même orientation; entre les paramètres directeurs, il existe deux groupes équivalents de six relations, que *L. F. Painvin*[28]) a étendues aux axes quelconques.

En supposant les deux systèmes d'axes rectangulaires[29]), *L. Euler*[30]) a donné des formules de transformation dans lesquelles n'apparaissent que trois angles dont dépendent les neuf cosinus directeurs relatifs aux nouveaux axes[31]).

Les formules de transformation relatives aux coordonnées homogènes[32]) se déduisent aisément des précédentes en égalant les variables d'homogénéité; *L. F. Painvin*[33]) a donné les formules générales de transformation des coordonnées tétraédriques.*

J. F. Français [J. Ec. polyt. (1) cah. 14 (1808), p. 188] avait déjà rencontré ces formules. *J. N. P. Hachette* [Correspondance sur l'Ec. polyt. 2 (1809/13), p. 7 [1809]] y est d'ailleurs parvenu peu après par une autre voie.*

26) *J. F. Français* [J. Ec. polyt. (1) cah. 14 (1808), p. 184] envisage ce déterminant dans le cas où, le système primitif étant rectangulaire, le nouveau système est oblique, mais il n'en calcule pas la valeur.*

27) *La distinction entre les deux cas où le déterminant est $+1$ ou -1 est faite avec soin par *L. I. Magnus,* Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie 2, Berlin 1837, p. 56.*

28) **Ch. A. A. Briot* et *J. C. Bouquet*, Géom. analyt.[21]), p. 516; *E. Pruvost,* Géom. analyt.[20]) 2, p. 16; *B. Niewenglowski,* Géom. analyt.[21]) 3, p. 28; *L. F. Painvin,* Principes de la géométrie analytique 2, lithographié Douai 1869, première partie, p. 22.*

29) *Voir *G. Monge,* J. Ec. polyt. (1) cah. 11 (an X), p. 149.*

30) *Introd.[7]) 2, p. 369; trad. *J. B. Labey* 2, p. 373. *Cf. Novi Comm. Acad. Petrop. 15 (1770), éd. 1771, p. 75/106 [1770].*

31) *Dans ces formules de *L. Euler* les neuf cosinus directeurs dépendent des sinus et des cosinus de ces trois angles, mais ces sinus et cosinus n'y figurent pas symétriquement. *O. Rodrigues* [J. math. pures appl. (1) 5 (1840), p. 405] a donné des formules fournissant les neuf cosinus directeurs en fonctions symétriques de trois paramètres dont ces neuf cosinus dépendent algébriquement. (Note de *F. Dingeldey*).*

*Voir aussi *G. Koenigs,* Leçons de cinématique, Paris 1897, p. 197, 343.*

32) **A. F. Möbius* donne les formules de transformations des coordonnées barycentriques [Der baryc. Calcul[12]), p. 42; Werke 1, p. 58].*

**J. Plücker* [System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise, insbesondere die Theorie der Flächen zweiter Ordnung und Classe enthaltend, Düsseldorf 1846, p. 9] donne les formules générales de transformation des coordonnées tétraédriques.*

33) *Géom. analyt.[28]) 2, première partie, p. 86; *Ch. A. A. Briot* et *J. C. Bouquet,* Géom. analyt.[21]), p. 346. *O. Staude* [Analyt. Geom. der Ebene[8]), p. 349] donne des formules de transformation connexes pour les coordonnées tétraédriques du point du plan et de la droite.*

4. *Centre des distances proportionnelles. Si un point A_i de coordonnées x_i, y_i, z_i est affecté d'un coefficient α_i, le *centre des distances proportionnelles* de n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a pour coordonnées

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}, \\ &\frac{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}, \\ &\frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}. \end{aligned}$$

Si x_i', y_i', z_i', t_i' sont les coordonnées homogènes du point A_i, un point quelconque de l'espace aura pour coordonnées

$$\begin{aligned} &\beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' + \cdots + \beta_n x_n', \\ &\beta_1 y_1' + \beta_2 y_2' + \cdots + \beta_n y_n', \\ &\beta_1 z_1' + \beta_2 z_2' + \cdots + \beta_n z_n', \\ &\beta_1 t_1' + \beta_2 t_2' + \cdots + \beta_n t_n', \end{aligned}$$

et les coefficients β_i peuvent être égaux aux coefficients α_i, quand on suppose

$$t_1' = t_2' = \cdots = t_n' = 1.$$

Les expressions (1) conviennent d'ailleurs à un système de coordonnées polyédriques[34]); les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ qui y figurent sont les coordonnées barycentriques relatives aux n points fixes[35]).*

5. *Droite. Une droite peut être définie par un de ses points $A(x_0, y_0, z_0)$ et par ses paramètres directeurs a, b, c; tout point M de la droite sera déterminé si l'on connait le nombre ϱ qui mesure le vecteur AM sur l'axe ayant pour paramètres directeurs a, b, c; les coordonnées du point M seront[36])

$$x = x_0 + a\varrho, \quad y = y_0 + b\varrho, \quad z = z_0 + c\varrho.$$

La droite peut aussi être représentée par deux équations

$$\frac{x - x_0}{a'} = \frac{y - y_0}{b'} = \frac{z - z_0}{c'},$$

a', b', c' étant des quantités proportionnelles aux paramètres directeurs a, b, c.

---

34) **L. F. Painvin,* Géom. analyt.[28]) 2, première partie, p. 113.*

35) **A. F. Möbius,* Der baryc. Calcul[12]), p. 37, 52, 56; Werke 1, p. 54, 67, 71.*

36) **A. L. Cauchy,* Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie 1, Paris 1826, p. 9; Œuvres (2) 5, Paris 1903, p. 16.*

La condition d'orthogonalité de deux droites se déduit de la relation (1) [n° 2] en remplaçant son premier membre par zéro.

Un point d'une droite peut aussi être défini comme centre des distances proportionnelles de deux points fixes de cette droite; ses coordonnées sont celles du n° 4, dans lesquelles on suppose $n = 2$. En faisant varier α_1 et α_2, ou β_1 et β_2, on obtient tous les points de la droite.

Deux points de la droite pour lesquels les rapports $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ sont opposés, ou pour lesquels les rapports $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ sont opposés, sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points fixes.

D'une façon générale, le rapport anharmonique de quatre points est égal au rapport anharmonique des nombres $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ qui leur correspondent[37].*

6. *Plan. Un plan est représenté par une équation du premier degré entre les coordonnées d'un point quelconque du plan[38]; en coordonnées cartésiennes son équation est donc de la forme

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

où A, B, C, D sont des constantes et x, y, z les coordonnées courantes. S'il s'agit de coordonnées polyédriques[39], l'équation du premier degré qui représente le plan est homogène ou peut être rendue homogène.

On peut aussi représenter un point du plan par ses coordonnées barycentriques [n° 4] relatives à des points fixes du plan, en particulier relatives à trois points fixes du plan, auquel cas on a ce qu'on appelle une *représentation à paramètres*[40].

Au point de vue projectif, on peut concevoir, sous le nom de plan de l'infini[41], l'ensemble de tous les points à l'infini de l'espace; le plan de l'infini coupe un plan quelconque suivant la droite de l'infini de ce plan et une droite quelconque suivant le point à l'infini de cette droite.

L'emploi des coordonnées polyédriques permet de faire correspondre à cette façon de parler des expressions analytiques déterminées. On obtient ainsi l'équation du plan de l'infini en coordonnées homogènes, en annulant la coordonnée t d'homogénéité[42].

On obtient son équation en coordonnées tétraédriques en annulant le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ x_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t = 0, \\ x_2 &\equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t = 0, \\ x_3 &\equiv a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t = 0, \\ x_4 &\equiv a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 t = 0 \end{aligned}$$

sont les équations, en coordonnées homogènes, des quatre plans du tétraèdre fondamental, en sorte que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

La condition nécessaire et suffisante pour que quatre points (à distance finie ou infinie) soient dans un même plan est que le déterminant formé par leurs coordonnées homogènes ou tétraédriques soit nul, ou encore qu'il existe entre les coordonnées de même nom une même relation linéaire et homogène.*

7. *Faisceau de plans. Deux plans ont en commun une droite à distance finie ou infinie; un *faisceau de plans* est l'ensemble des plans passant par une même droite[43], qui peut être représentée par les équations de deux de ces plans. Si

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0$$

37) *Cf. *Ch. J. Brianchon,* Mémoire sur les lignes du second ordre, Paris 1817, p. 7; cf. n° 1. Voir surtout les notes 5 à 8 de l'article III 17.*

38) *Voir *A. C. Clairaut,* Courbes à double courbure[6], p. 6 (n° 10) et p. 38 (n° 66). Voir aussi *J. L. Lagrange,* Nouv. Mém. Acad. Berlin 4 (1773), éd. 1775, p. 157; Œuvres 3, Paris 1869, p. 670; *L. Euler,* Acta Acad. Petrop. 6 (1782) I, éd. 1786, p. 19/57 [1775].*

39) *L. F. Painvin,* Géom. analyt.[28] 2, p. 112; *P. Serret,* Géom. de direction[14], p. 21.*

40) *A. F. Möbius,* Der baryc. Calcul[12], section 1, chap. 4, § 49; Werke 1, p. 71: cf. *O. Staude,* Analyt. Geom. der Ebene[8], p. 351/2, 191/2.*

41) *J. V. Poncelet,* Traité des propriétés projectives des figures, (1re éd.) Paris 1822, p. 373; (2e éd.) 1, Paris 1865, p. 361; *M. Chasles,* Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, (1re éd.) Bruxelles 1837 [Mém. couronnés Acad. Bruxelles in 4°, 11 (1837), p. 581; (2e éd.) Paris 1875, p. 581; (3e éd.) Paris 1889, p. 581; *L. F. Painvin,* Géom. analyt.[28] 2, première partie, p. 36, 94; *B. Niewenglowski,* Géom. analyt.[21] 3, p. 49, 54.*

42) *O. Staude,* Analyt. Geom. der Ebene[8], p. 230, équation (6).*

43) *G. Desargues* [Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cone avec un plan, Paris 1639; Œuvres, éd. *N. G. Poudra* 1, Paris 1864, p. 105], au lieu de faisceau de plans, dit „ordonnance de plans".*

sont les équations de deux plans du faisceau, chacun des plans du faisceau a une équation de la forme[44])

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0.$$

Les plans sont parallèles, si l'on peut choisir $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ de façon que cette équation représente le plan de l'infini. En particulier, en coordonnées cartésiennes, les coefficients des coordonnées x, y, z, que l'on appelle *coefficients directeurs*, sont proportionnels.

Le rapport anharmonique de quatre plans du faisceau est le rapport anharmonique des nombres $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ qui correspondent à ces plans. Une droite quelconque coupe ces quatre plans en quatre points dont le rapport anharmonique est égal à celui des quatre plans. Un plan quelconque coupe les quatre plans suivant quatre droites dont le rapport anharmonique est égal à celui des quatre plans.

Quand le rapport anharmonique de quatre plans est égal à -1 on dit que ces quatre plans forment un faisceau harmonique et que les deux premiers plans sont conjugués harmoniques ainsi que les deux derniers. Les deux plans, dont les équations sont

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0, \quad \lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2 = 0,$$

forment avec les plans dont les équations sont

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0$$

un faisceau harmonique.

Le lieu du conjugué harmonique d'un point A, par rapport aux intersections de deux plans

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0$$

avec tous les rayons de la gerbe de droites ayant A pour centre, est un plan. On appelle ce plan le *plan polaire* du point A par rapport à l'ensemble des deux plans $P_1 = 0$, $P_2 = 0$.

Le plan polaire d'un point A par rapport à l'ensemble de deux plans

$$P_1 = 0, \; P_2 = 0$$

est le plan conjugué par rapport à ces deux plans du plan déterminé par A et par l'intersection de ces deux plans. L'équation du plan polaire d'un point A de coordonnées homogènes (x_1, y_1, z_1, t_1) par rapport aux deux plans $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ est

$$\frac{P_1}{P_1'} + \frac{P_2}{P_2'} = 0,$$

44) *G. Lamé*, Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie, Paris 1818, p. 34; (2e éd.) fac simile de la première édition, Paris 1903, p. 34.*

P_1' et P_2' étant les valeurs de P_1 et P_2 quand on y remplace les coordonnées courantes par celles du point donné.

La condition nécessaire et suffisante pour que trois plans passent par une même droite est qu'il existe entre les premiers membres des équations de ces plans une relation linéaire et homogène, identique, à coefficients non tous nuls, ou encore que tous les déterminants du troisième ordre formés avec les coefficients des équations soient nuls, ce qui fournit *deux* relations distinctes[45]).*

8. *Gerbe de plans. Réseau de plans. Trois plans, qui ne font pas partie d'un faisceau, ont un point commun (à distance finie ou infinie); si

$$P_1 = 0, \; P_2 = 0, \; P_3 = 0$$

sont les équations de ces plans, l'équation générale des plans qui passent par leur point commun est

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0.$$

Tous ces plans forment une *gerbe de plans*. Le point commun à tous les plans d'une gerbe de plans est le *centre* de cette gerbe.

K. G. Chr. von Staudt[46]) a désigné sous le nom de *réseau de plans* enveloppant une surface déterminée (qu'aucune droite ne coupe en plus de deux points) l'ensemble des plans tangents à cette surface. Si l'on se conforme à cette façon de parler, une gerbe de plans est donc un réseau particulier de plans, celui qui enveloppe un point (le centre de la gerbe). En France, on réserve le plus souvent le nom de réseau de plans à ce réseau particulier de plans désigné ici sous le nom de gerbe de plans.

On appelle *gerbe de droites*[47]) ou *pinceau de droites* l'ensemble de toutes les droites de l'espace passant par un même point.

La condition nécessaire et suffisante pour que quatre plans passent par un même point est qu'il existe entre les premiers membres des équations de ces plans une relation linéaire et homogène, identique, à coefficients non tous nuls, ou encore que le déterminant du quatrième ordre formé avec les coefficients des équations soit nul.*

9. *Équation normale d'un plan. *L. O. Hesse* a donné l'équation *normale* d'un plan[48]), en le définissant par le vecteur ayant pour origine l'origine O des coordonnées (supposées rectangulaires) et pour extrémité

45) *G. Lamé*, Examen[44]), p. 31/2, 34, 36.*

46) *K. G. Chr. von Staudt* [Geometrie der Lage, Nuremberg 1847, p. 105] dit *Ebenenbündel*.*

47) *Strahlenbündel* [*K. G. Chr. von Staudt*, Geom. der Lage[46]), p. 4].*

48) *Cette forme normale se rencontre déjà dans *L. I. Magnus* [Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 2, p. 36] sous une forme équivalente.*

le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine O sur le plan; si p est la mesure de ce vecteur et α, β, γ les angles que fait avec Ox, Oy, Oz l'axe sur lequel il est porté, l'équation normale du plan est[49])

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0.$$

Cette équation met en évidence le fait que le plan partage l'espace en deux régions, telles que le résultat de la substitution des coordonnées d'un point de l'espace dans le premier membre de l'équation (normale ou non) d'un plan a un signe, toujours le même, si le point est dans une région.

Elle donne également l'expression de l'angle de deux plans, d'une droite et d'un plan, les conditions d'orthogonalité; on en déduit la distance d'un point à une droite[50]), le volume d'un tétraèdre[51]), etc.[52]).

Mais la question du signe à donner aux expressions analytiques dont les valeurs absolues représentent ces diverses grandeurs est plus délicate. Elle n'a été entièrement élucidée que par *A. F. Möbius*[53]) et *L. O. Hesse*[54]).

L. F. Painvin[55]) a traité les questions relatives aux angles et aux distances en coordonnées obliques et, plus généralement, en coordonnées tétraédriques; en particulier, le volume d'un tétraèdre T quelconque est le produit, par un facteur qui ne dépend que du tétraèdre de référence, du déterminant formé avec les coordonnées tétraédriques des sommets de T.

La formule donnant le volume du tétraèdre dont un des sommets coïncide avec l'origine des coordonnées a été donnée par *J. L. Lagrange*[56]).*

49) *L. O. Hesse,* Analyt. Geom. des Raumes[16]), (1re éd.) Leipzig 1861, p. 15; (3e éd.) Leipzig 1876, p. 16.*

50) *G. Monge* et *J. N. P. Hachette,* J. Ec. polyt. (1) cah. 11 (an X), p. 148; *L. I. Magnus,* Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 2, p. 37.*

51) *Cf. *O. Staude,* Analyt. Geom. der Ebene[8]), p. 184, 194.*

52) *M. Chasles* [Aperçu hist.[41]), (2e éd.), p. 765] donne l'expression de la distance d'un point à un plan en coordonnées obliques.

On peut consulter à ce sujet *Ch. A. A. Briot* et *J. C. Bouquet,* Géom. analyt.[21]), p. 530, 537/48; *E. Pruvost,* Géom. analyt.[20]) 2, p. 39/41, 50/61; *B. Niewenglowski,* Géom. analyt.[21]) 3, p. 41/78.*

53) *Abh. Ges. Lpz (math.) 4 (1855), p. 529/95; Werke 2, Leipzig 1886, p. 246.*

54) *Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 18.*

55) *Géom. analyt.[26]) 2, première partie, p. 91/3, 97/109.*

56) *Nouv. Mém. Acad. Berlin 4 (1773), éd. 1775, p. 159; Œuvres 3, Paris 1869, p. 672.*

**H. R. Baltzer* a donné de nombreux renseignements [J. reine angew. Math. 73 (1871), p. 94; Ber. Ges. Lpz. 22 (1870), math. p. 97] concernant les diverses expressions du volume d'un tétraèdre.*

10. *Éléments imaginaires. L'introduction de la notion de points, droites et plans imaginaires est d'une importance capitale dans la géométrie synthétique; elle permet de justifier la méthode des *relations contingentes* de *G. Monge,* que *J. V. Poncelet*[57]) a rattachée au *principe de continuité.*

Un point imaginaire est déterminé par l'ensemble de trois nombres complexes non réels tous les trois; ces trois nombres complexes sont les coordonnées cartésiennes du point imaginaire. Ou encore: un point imaginaire est déterminé par l'ensemble de quatre nombres complexes non réels tous les quatre et non proportionnels à quatre nombres réels[58]); ces quatre nombres complexes sont les coordonnées, homogènes ou tétraédriques, du point imaginaire.

Un plan imaginaire est déterminé par une équation linéaire à coefficients complexes qui ne sont pas les produits de quatre nombres réels par un même nombre complexe.

Une droite imaginaire est représentée par l'ensemble de deux équations linéaires à coefficients complexes (réels ou imaginaires) qui ne sont pas les produits de quatre nombres réels par un même nombre complexe, les deux équations n'ayant pas leurs coefficients proportionnels ou conjugués.

Tout élément géométrique qui correspond à des points, droites, plans réels est représenté par une expression ou par une équation ou plus généralement un ensemble de relations où n'entrent que des quantités réelles; cet ensemble de relations sert de définition à l'élément imaginaire correspondant à des points, droites, plans imaginaires.

Des éléments imaginaires sont conjugués, si les expressions algébriques qui les représentent sont formées de nombres imaginaires respectivement conjugués.

Ainsi, les points $(1, i, 1+i)$ et $(1, -i, 1-i)$ sont conjugués.

Il y a dans l'espace deux sortes de droites imaginaires: celles qui ont un point réel et sont contenues dans un plan réel, et celles qui n'ont aucun point réel[59]).

57) *Propriétés projectives[41]), (1re éd.) p. IX et suiv., p. 55, 68 et suiv., 225/6, 413/6; (2e éd.) 1, p. XIII et suiv., p. 54, 66 et suiv., 218/9, 405/8; *M. Chasles,* Aperçu hist.[41]), (2e éd.) p. 197/207.*

58) *Cette définition a été critiquée par *K. G. Chr. von Staudt* [Beiträge zur Geometrie der Lage, fasc. 1, Nuremberg 1856]; il lui reproche de faire intervenir la notion de coordonnées qu'il estime devoir rester étrangère à l'introduction des éléments imaginaires.*

59) *Cette distinction remonte à *K. G. Chr. von Staudt,* Beiträge zur Geometrie

Parmi les droites imaginaires, il y a une série de droites remarquables, les *isotropes*[60]; toutes celles qui passent par un point constituent le *cone isotrope*, qui est une sphère de rayon nul réduite au point considéré.

Toutes les droites isotropes passent par les ombilics (points cycliques) des plans qui les contiennent et rencontrent le plan de l'infini suivant un cercle imaginaire, lieu des ombilics de tous les plans; cette courbe est l'*ombilicale*[61]).

Toute isotrope est sa propre perpendiculaire.

E. N. Laguerre[62]) fait correspondre à tout point imaginaire un cercle réel parcouru dans un sens convenable; ce cercle est l'intersection de deux cônes isotropes qui ont pour sommets le point et son conjugué.

K. G. Chr. von Staudt[63]) considère la droite réelle qui joint deux points imaginaires conjugués et sur cette droite une involution sans points doubles réels; aux deux sens que l'on peut choisir sur la droite correspondent les deux points imaginaires.*

11. ***Coordonnées tangentielles.** L'équation d'un plan en coordonnées rectilignes est

$$ux + vy + wz + \tau t = 0;$$

les nombres u, v, w, τ, qui définissent le plan, sont appelés les coordonnées tangentielles du plan[64]). Si $\tau = 1$, u, v, w sont les coordonnées tangentielles cartésiennes du plan; si τ est quelconque, u, v, w, τ sont les coordonnées tangentielles homogènes ou tétraédriques du plan.

der Lage, fasc. 1, Nuremberg 1856, p. 78. Parmi les traités contemporains cf. *B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]) 3, p. 84.*

60) **E. N. Laguerre*, C. R. Acad. sc. Paris 60 (1865), p. 70; Bull. Soc. philom. Paris (6) fasc. 7 (1870), p. 96; Nouv. Ann. math. (2) 11 (1872), p. 16; Œuvres 2, Paris 1905, p. 18, 109, 238; *S. Lie* et *G. Scheffers*, Geometrie der Berührungstransformationen 1, Leipzig 1896, p. 225] disent *droite minimale (Minimalgerade)*.*

61) *Plusieurs auteurs [cf. *G. Salmon*, trad. *O. Chemin*, Géométrie analytique à trois dimensions (2e éd.) 1, Paris 1899, p. 187; *B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]) 3, p. 92] remplacent le mot *ombilicale* par la locution *cercle imaginaire de l'infini*.*

62) *Bull. Soc. philom. Paris (6) fasc. 7 (1870), p. 95; Nouv. Ann. math. (2) 11 (1872), p. 16; Œuvres 2, Paris 1905, p. 110, 239.*

63) *Beiträge zur Geometrie der Lage, fasc. 1, Nuremberg 1856, p. 76/86; fasc. 2, Nuremberg 1857, p. 259/65. Cf. III 17, note 37. Au sujet de la théorie des imaginaires suivant *K. G. Chr. von Staudt*, voir l'article III 8.*

64) **J. Plücker* [J. reine angew. Math. 9 (1832), p. 124 [1831]; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 224] qui a introduit ces coordonnées les appelle coordonnées planaires.*

En supposant $\tau = 1$, les trois coordonnées tangentielles u, v, w du plan sont les inverses changés de signe des nombres qui mesurent les vecteurs déterminés sur les axes par le plan; dans le cas des coordonnées tétraédriques, u, v, w, τ sont proportionnelles aux distances des sommets du tétraèdre de référence au plan.

Un point est représenté par une équation du premier degré; une droite est représentée par l'ensemble de deux équations du premier degré.

La comparaison du système de coordonnées tangentielles et du système de coordonnées ponctuelles met en évidence le *principe de dualité*[65]) où les points et les plans, les ponctuelles et les faisceaux de plans, les points du plan et les plans de la gerbe, l'intersection de trois plans et le plan déterminé par trois points se correspondent parfaitement, tandis qu'une droite joignant deux points et une droite intersection de deux plans se correspondent parfaitement. *M. Chasles*[66]) a précisé ce principe de dualité en généralisant les résultats obtenus par la méthode des polaires réciproques.

Aux formules citées au n° **1** on peut adjoindre les relations suivantes[67]) entre les coordonnées homogènes u, v, w, τ d'un plan et les coordonnées tétraédriques u_1, u_2, u_3, u_4 de ce même plan:

$$\begin{cases} \varrho u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + a_4 u_4 \\ \varrho v = b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 + b_4 u_4 \\ \varrho w = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4 \\ \varrho \tau = d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3 + d_4 u_4 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \sigma u_1 = A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1 \tau \\ \sigma u_2 = A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2 \tau \\ \sigma u_3 = A_3 u + B_3 v + C_3 w + D_3 \tau \\ \sigma u_4 = A_4 u + B_4 v + C_4 w + D_4 \tau \end{cases}$$

La condition pour qu'un point donné soit contenu dans un plan donné ou qu'un plan donné passe par un point donné est un *invariant*, car on a

$$ux + vy + wz + \tau t = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4.$$

C'est là la raison pour laquelle, dans tous les systèmes de coordonnées envisagés, la géométrie analytique du plan et celle du point conservent le même caractère *formel*. On reconnaît aussi, dans la symétrie

65) **J. D. Gergonne*, Ann. math. pures appl. 16 (1825/6), p. 209, 212; 17 (1826/7), p. 37. Au sujet de ce principe voir l'article III 17, **3**, notes 28, 29, 83. On peut aussi consulter *O. Staude*, Analyt. Geom. der Ebene[8]), p. 425, 441.*

66) **M. Chasles*, Aperçu hist.[41]), (2e éd.) p. 633.*

67) **O. Staude*, Analyt. Geom. der Ebene[8]), p. 303.*

de cette relation en u_1, u_2, u_3, u_4 et x_1, x_2, x_3, x_4, l'expression analytique du *principe de dualité.*

M. Chasles[68]) signale les coordonnées tangentielles comme pouvant servir de base à une nouvelle géométrie analytique qu'il oppose à celle qu'on attribue souvent à *R. Descartes.*

Le nom de coordonnées tangentielles semble avoir été créé par *L. F. Painvin*[69]).*

12. *Coordonnées de Plücker. Les travaux de *A. F. Möbius* et de *M. Chasles* ont fait ressortir l'importance de la dualité et de l'homographie, qui établissent une correspondance, la première entre point et plan, la seconde entre point et point ou plan et plan; chacune d'elles faisant correspondre une droite à une droite. La double propriété de la droite de se transformer en une droite par dualité et par homographie a conduit à considérer l'espace comme ayant pour élément fondamental, non plus le point ou le plan, mais la droite.

C'est *J. Plücker*[70]) qui, le premier, eut l'idée de représenter une droite par six coordonnées[71]): les projections X, Y, Z sur trois axes rectangulaires d'un vecteur porté sur cette droite et les moments L, M, N de ce vecteur par rapport aux trois axes, ces coordonnées figurant toujours sous forme homogène et étant liées par la relation

$$LX + MY + NZ = 0.$$

68) **M. Chasles,* Correspondance math. phys. (de *A. Quetelet*) 6 (1830), p. 81: Aperçu hist.[41]), (2ᵉ éd.) p. 633.*

69) **L. F. Painvin,* Géom. analyt.[28]) 2, première partie p. 114; *B. Niewenglowski,* Géom. analyt.[21]) 3, p. 186; *G. Papelier,* Leçons sur les coordonnées tangentielles 2, Paris 1895.*

70) **J. Plücker,* Neue Geometrie des Raumes, Leipzig 1869, p. 6/7 [1868]. *J. Plücker* fait usage de la locution „*Strahlencoordinaten*".

Parmi les traités contemporains voir, au sujet de ces coordonnées, par ex. *B. Niewenglowski,* Géom. analyt.[21]) 3, p. 61.*

71) **J. Plücker* [System der Geom. des Raumes[32]), p. 322; Proc. R. Soc. London 14 (1865), p. 54; Philos. Trans. London 155 (1865), p. 726; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 463, 471] avait d'abord introduit, sous le nom de *coordonnées de la droite,* quatre constantes indépendantes caractérisant la position de la droite; un peu plus tard [Neue Geom. des Raumes[70]), p. 1, 3] il envisage *cinq* coordonnées de la droite. Les *six* coordonnées de la droite se rencontrent dans *H. Grassmann,* Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844, p. 170; Werke 1¹, publ. par *F. Engel,* Leipzig 1894, p. 192, 195.*

*Dès 1860 *A. Cayley* [Quart. J. pure appl. 3 (1860), p. 225 et suiv.; Papers 4, Cambridge 1891, p. 446 et suiv.] avait introduit les six coordonnées homogènes de la droite (Note de *G. Loria*).*

Mais il ne les avait pas désignées comme étant les *coordonnées de la droite* [cf. *S. Lie* et *G. Scheffers,* Berührungstransf.[60]) 1, p. 274; *O. Staude,* Analyt. Geom. der Ebene[8]), p. 438 note 103].

Les vecteurs qui ont pour projections sur les axes X, Y, Z et L, M, N sont le vecteur choisi sur la droite et son moment par rapport à l'origine; on les appelle *coordonnées vectorielles*[72]) de la droite.

L'emploi de ce système de coordonnées ne permit pas à *J. Plücker* de laisser de côté l'espace considéré soit comme engendré par des points, soit comme engendré par des plans; ce fut *F. Klein*[73]) qui parvint à se libérer de ces considérations et à constituer une géométrie où il n'est fait appel qu'à la droite.

Considérant un tétraèdre de référence, il établit que l'on peut définir indifféremment une droite comme lieu de points ou comme intersection de plans au moyen de six quantités $r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{42}, r_{34}$ liées par la relation

$$\omega(r) = 2(r_{12}r_{34} + r_{13}r_{42} + r_{14}r_{23}) = 0.$$

Ce sont ces six quantités qui sont les coordonnées de la droite.*

13. *Complexes et congruences. Une droite dépend de quatre paramètres arbitraires; les droites qui ne dépendent que de trois paramètres forment un *complexe*; celles qui ne dépendent que de deux paramètres forment une *congruence*; celles qui ne dépendent que d'un paramètre forment une *série réglée.*

Un complexe[74]) est défini par une équation algébrique homogène entre les coordonnées de la droite; par un point passent une infinité de droites du complexe, qui forment le *cône du complexe*; dans un plan, les droites du complexe enveloppent une courbe qui est appelée la *courbe du complexe.* Le cône du complexe a pour *degré,* et la courbe du complexe a pour *classe* le nombre des droites du complexe situées dans un plan et passant par un point de ce plan; c'est l'*ordre* ou le *degré* du complexe, qui ne dépend que du degré de son équation.

Le *complexe linéaire*[75]) ou du premier ordre correspond à une

72) **B. Niewenglowski,* Géom. analyt.[21]) 3, p. 65. Ces coordonnées vectorielles ont été utilisées pour l'étude des complexes, congruences, et des surfaces réglées, comme on le verra dans d'autres articles de l'Encyclopédie.*

73) **F. Klein,* Diss. Bonn 1868; Math. Ann. 2 (1870), p. 198; 23 (1884), p. 539 [1868]; *G. Koenigs,* La géométrie réglée et ses applications, Paris 1895, p. 5/11.*

74) **J. Plücker,* Neue Geometrie des Raumes[70]), p. 18, 26; *G. Kœnigs,* Géom. réglée[73]), p. 13/5; *B. Niewenglowski,* Géom. analyt.[21]) 3, p. 191/6. La théorie des complexes sera exposée dans d'autres articles de l'Encyclopédie.*

75) **J. Plücker,* Proc. R. Soc. London 14 (1865), p. 54; Philos. Trans. London 155 (1865), p. 733; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 464, 478.*

équation du premier degré; son cône se réduit à un plan et sa courbe à un point; il y a correspondance univoque entre un plan et un point de ce plan; le point est appelé *foyer* ou *pôle* du plan; le plan est appelé *plan focal* ou *plan polaire* du point.

Le nombre des droites d'une congruence qui passent par un point est indépendant du point choisi; c'est l'*ordre* ou le *degré* de la congruence; le nombre des droites d'une congruence qui sont dans un plan est indépendant du plan choisi; c'est la *classe* de la congruence.*

Classification des quadriques.

14. Historique. *La considération du degré d'une équation algébrique fournit une première classification des surfaces. Théoriquement, il serait possible d'étudier toutes les surfaces dont on connaît l'équation et on peut, comme premier sujet d'étude, se proposer de classer toutes les surfaces d'un degré donné; la question est déjà très complexe et n'est résolue complètement que pour le second degré et le troisième.

Lorsqu'on ne veut pas appeler l'attention soit sur le caractère ponctuel soit sur le caractère tangentiel de la surface du second degré, on la désigne souvent sous le nom de *quadrique*.*

*Outre les surfaces de la géométrie élémentaire (le cylindre, le cône et la sphère), les Anciens ont considéré, à partir d'*Archimède*[76]), certaines quadriques de révolution: le *conoïde rectangle* (orthogone) auquel nous avons donné le nom de paraboloïde, le *conoïde obtusangle* (amblygone) qui est l'une des nappes de l'hyperboloïde de révolution à deux nappes, et le *sphéroïde* qui est notre ellipsoïde de révolution autour de son petit axe ou de son grand axe. Ce ne sont pas toutefois les propriétés de ces quadriques qui font l'objet des principales recherches d'*Archimède*[77]); c'est plutôt l'évaluation des volumes limités par l'une ou l'autre de ces quadriques et des plans. Ce n'est ensuite que vers le milieu du dix-septième siècle que la théorie des quadriques a fait de réels progrès[78]).*

76) *D'un passage reproduit par *Eutocius* [cf. *Archimède*, Opera omnia cum commentariis Eutocii, éd. *J. L. Heiberg* 3, Leipzig 1881, p. 98/102] on pourrait conclure qu'*Archytas* a considéré, avant *Archimède*, une surface de révolution du quatrième degré (un tore particulier).*

77) *Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων; Opera[76]) 1, Leipzig 1880, p. 273/499; (2e éd.) Leipzig 1910, p. 345/445 (Texte et notes 76 et 77 de *G. Eneström*).*

78) *En 1615, *J. Kepler* a étudié les surfaces engendrées par la rotation d'une conique autour d'une droite quelconque située dans son plan [Nova stereometria doliorum vinariorum, Linz 1615; Opera, éd. *C. Frisch* 4, Francfort et Erlangen 1863, p. 574/601].*

**P. de Fermat*[79]) avait déjà envisagé des quadriques qui ne sont pas de révolution, *G. Desargues*[80]) et *J. Wallis*[81]) s'étaient aussi occupés en passant de ces mêmes surfaces*; **Chr. Wren*[82]) a le premier signalé l'*hyperboloïde à une nappe*.* *Mais ce n'est qu'après l'introduction des coordonnées dans l'espace que les quadriques ont été étudiées de plus près.*

**A. Parent*[4]) a étudié la sphère au moyen de son équation; *A. C. Clairaut*[83]) a trouvé les équations des surfaces de révolution du second ordre, celle des cônes dont le sommet est à l'origine, et il a donné aussi les équations de quelques courbes gauches[84])*.

L. Euler[85]) entreprit le premier une étude systématique des surfaces du second ordre, en considérant l'équation générale du second degré entre les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point. Montrant que le degré de cette équation n'est pas altéré par une transformation de coordonnées, il en déduisit la propriété caractéristique d'une telle surface d'être rencontrée en deux points par toute droite non située sur la surface et d'être coupée suivant une ligne du second ordre par un plan qui ne fait pas partie de la surface.

Pour effectuer la classification des surfaces du second ordre, *L. Euler* emploie deux méthodes: d'une part[86]) il étudie la nature du cône des directions asymptotiques; d'autre part[87]), il ébauche la recherche

79) *Isagoge ad locos ad superficiem, ouvrage posthume, rédigé en 1643; Œuvres, éd. *P. Tannery* et *Ch. Henry* 1, Paris 1891, p. 111/7. *P. de Fermat* semble ignorer l'existence du paraboloïde hyperbolique et de l'hyperboloïde à une nappe.*

80) **G. Desargues*, Brouillon project[43]); Œuvres, éd. *N. G. Poudra* 1, p. 291 (Note de *G. Loria*).*

81) *Tractatus de sectionibus conicis, Oxford 1655, prop. 9, 14, 18; Opera 1, Oxford 1695, p. 307, 312, 315. *J. Wallis* appelle les surfaces qu'il envisage: „pyramidoeides parabolicum, ellipticum, hyperbolicum". Sous le nom de „paraboloeides, ellipsoeides, hyperboloeides" il entend des courbes planes et non pas des surfaces (Texte et notes 79 et 81 de *G. Eneström*).*

82) *Philos. Trans. London 3 (1668/9), p. 961 (Texte et note de *G. Loria*).*

83) *A. C. Clairaut*, Courbes à double courbure[6]), p. 2, 8 et suiv.

84) *Presqu'à la même époque *J. Hermann* [Comm. Acad. Petrop. 6 (1732/3), éd. 1738, p. 36/67] a étudié quelques cas spéciaux de l'équation générale des quadriques (Note de *G. Eneström*).*

85) *L. Euler*, Introd.[7]) 2, p. 369/73; trad. *J. B. Labey* 2, p. 374/8. La même propriété sert de base à la théorie synthétique des quadriques; voir *J. Steiner*, Systematische Entwickelungen der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander, Berlin 1832, p. 186; Werke 1, Berlin 1881, p. 365; *K. G. Chr. von Staudt*, Geom. der Lage[46]), p. 197; *F. Seydewitz*, Archiv Math. Phys. (1) 9 (1847), p. 190.

86) *L. Euler* (c'est la première ébauche de la classification du n° 19) Introd.[7]) 2, p. 375/8; trad. *J. B. Labey* 2, p. 380/3.

des formes normales de l'équation au moyen d'une transformation de coordonnées rectangulaires et est ainsi conduit à distinguer différents genres de surfaces du second ordre.

G. Monge et *J. N. P. Hachette*[88]), se plaçant à ce dernier point de vue, ont repris et étendu la classification de *L. Euler,* en considérant l'équation du second degré entre les coordonnées obliques d'un point; *A. L. Cauchy* et *L. I. Magnus*[89]) l'ont complétée en y comprenant les surfaces du second ordre qui ont des points doubles.

J. Plücker introduisit deux notions nouvelles:

1°) la représentation d'une surface par son équation en coordonnées tétraédriques[90])

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = \sum_{(i,\,k)} a_{ik} x_i x_k = 0 \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

avec $a_{ik} = a_{ki}$, qui fournit une nouvelle manière [n° **16**] d'obtenir la classification en genres;

2°) la notion de surfaces de seconde classe, leur représentation en coordonnées tangentielles tétraédriques et leur classification[91]).

15. Les déterminants de la surface du second ordre. Toutes les recherches sur la classification, faites de *L. Euler* à *J. Plücker,* ont mis en évidence certaines fonctions des coefficients de l'équation du second degré, qui jouent un rôle important[92]). *A. L. Cauchy, C. G. J. Jacobi* et principalement *L. O. Hesse*[93]) ont reconnu dans ces fonctions le déterminant

$$A = |a_{ik}|$$

(que l'on appelle souvent le déterminant de Hesse, ou le discriminant de Hesse, ou encore l'invariant de Hesse), ainsi que ses mineurs du premier ordre

$$A_{ik}\ (i,\ k = 1, 2, 3, 4)$$

et ses mineurs du second ordre

$$\alpha_{ik}\ (i,\ k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)^{94}),$$

qui sont aujourd'hui les éléments analytiques fondamentaux de toute classification.

16. Classification par les points doubles. L'élément fondamental qui intervient dans la classification des surfaces du second ordre résultant de l'emploi des coordonnées homogènes ou de celui des coordonnées tétraédriques est *le nombre r*[95]) des coefficients qui, dans la représentation de la forme par une somme de carrés distincts

$$f = \sum_{i=1}^{i=r} b_i y_i^2,$$

est différent de zéro. Il en est d'ailleurs ainsi, que les coefficients a_{ik} ou encore les coefficients de la substitution soient réels ou non.

Ce nombre r est égal au *rang* du discriminant A[96]). Il peut donc avoir les valeurs 4, 3, 2 ou 1.

Si $r = 4$ la surface du second degré est une quadrique propre-

87) *L. Euler,* Introd.[7]) 2, p. 378/87; trad. *J. B. Labey* 2, p. 383/92. C'est là que l'on rencontre la première ébauche de la classification donnée au n° **18.**

88) *G. Monge* et *J. N. P. Hachette,* Application de l'algèbre à la géométrie, Paris 1805, p. 27/45; J. Ec. polyt. (1) cah. 11 (an X), p. 143; voir J. Ec. polyt. (1) cah. 2 (an IV), p. 104 [an III].

89) *A. L. Cauchy,* Applic. du calcul infin. à la géom.[36]) 1, p. 253; Exercices math. 3, Paris 1828, p. 87; Œuvres (2) 5, p. 264; (2) 8, p. 108; *L. I. Magnus,* Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 2, p. 205.

90) *J. Plücker,* System der Geom. des Raumes[32]), p. 49; *L. O. Hesse* [J. reine angew. Math. 28 (1844), p. 104; Werke, Munich 1897, p. 132] avait précédemment fait usage des coordonnées homogènes dans l'espace; voir la représentation en coordonnées barycentriques par *A. F. Möbius,* Der baryc. Calcul[12]), section 1 § 11; Werke 1, p. 136.

91) Voir *J. Plücker* [J. reine angew. Math. 9 (1832), p. 124; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 225] où *J. D. Gergonne* est signalé comme ayant le premier employé dans ce sens le mot *classe,* et *J. Plücker* [System der Geom. des Raumes[32]), p. 79]. *K. G. Chr. von Staudt* [Geom. der Lage[46]), p. 80, 196] considère la surface de seconde classe comme définie par un *réseau de plans* du second ordre; *J. Plücker,* J. reine angew. Math. 24 (1842), p. 62; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 391; *M. Chasles,* Aperçu hist.[41]), (2 éd.) p. 633.

92) Dans *L. Euler* [Introd.[7]) 2, p. 378; trad. *J. B. Labey* 2, p. 383] et dans *G. Monge* et *J. N. P. Hachette* [Applic. de l'algèbre à la géom.[88]), p. 27] figure, sans avoir été reconnu, le mineur A_{44}; il en est de même du discriminant A dans *L. I. Magnus,* Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 2, p. 208, et dans *J. Plücker,* System der Geom. des Raumes[32]), p. 52, 57.

G. Lamé [Examen[44]), p. 42, 72] retrouve la condition pour qu'une quadrique soit un cône, en éliminant x, y, z entre quatre équations linéaires, dont les coefficients sont les éléments de A.

93) *A. L. Cauchy,* Exercices math. 4, Paris 1829, p. 142; Œuvres (2) 9, Paris 1891, p. 176; *C. G. J. Jacobi,* J. reine angew. Math. 12 (1834), p. 11; Werke 3, Berlin 1884, p. 207; *L. O. Hesse,* Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 138.

Les déterminants sont envisagés comme des invariants par *L. O. Hesse,* J. reine angew. Math. 49 (1855), p. 253; Werke, Munich 1897, p. 329.

94) Pour ce qui concerne la signification des indices voir *H. R. Baltzer,* Theorie und Anwendung der Determinanten, (1re éd.) Leipzig 1857; (4e éd.) Leipzig 1875, p. 10.

95) *J. Plücker,* System der Geom. des Raumes[32]), p. 55, 59, 81; *H. R. Baltzer,* Analytische Geometrie, Leipzig 1882, p. 486; **Ch. Méray,* Nouv. Ann. math. (3) 11 (1892), p. 474;* *S. Gundelfinger* a étendu la classification d'après le rang aux formes quadratiques de n variables dans *L. O. Hesse,* Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 449.

96) Voir l'article I 2, n° **20.**

ment dite (surface sans point double). Si $r = 3$ la surface est un *cône*[97]) ou un *cylindre* (surface à un seul point double, que nous désignerons sous le nom de *surface singulière*). Si $r = 2$ la surface est un système de *deux plans distincts* (surface avec toute une droite de points doubles). Si $r = 1$ la surface est un *plan double* (surface avec tout un plan de points doubles). Dans ces deux derniers cas ($r = 2$ ou $r = 1$) on dit que la quadrique est dégénérée.

Les formes de ces surfaces ont été indiquées par *J. Plücker* et *L. O. Hesse*[98]).

Dans tous les cas où r n'est pas égal à quatre on dit que la surface est une quadrique *impropre*; elle appartient alors, en effet, à une variété de dimension inférieure[99]) à celle de l'espace ∞^3: si c'est un cône il appartient à une gerbe de dimension ∞^2; si c'est une paire de plans elle appartient à un faisceau de plans de dimension ∞^1.

17. Classification d'après la conique de l'infini. Une surface du second ordre peut être coupée par le plan de l'infini suivant une conique propre ou une conique dégénérée; elle peut encore contenir le plan de l'infini. Si l'équation de la surface a ses coefficients réels, on peut faire une classification qui repose sur la nature de sa section par le plan de l'infini:

1°) La conique de l'infini est une conique propre imaginaire (genre ellipsoïde).

2°) La conique de l'infini est une conique propre réelle (genre hyperboloïde).

3°) La conique de l'infini est un système de deux droites imaginaires (genre paraboloïde elliptique).

4°) La conique de l'infini est un système de deux droites réelles (genre paraboloïde hyperbolique).

5°) La conique de l'infini est une droite double (genre cylindre parabolique).

6°) La surface contient le plan de l'infini.

97) Avant l'étude de la surface générale du second ordre, le cône du second ordre avait été défini au moyen d'une directrice du second ordre [cf. *E. Kötter*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver., Berlin 5² (1898), Leipzig 1901, p. 66]. *M. Chasles* [Mém. Acad. Bruxelles (2) 6 (1830), p. 2] part également de cette définition.

98) *J. Plücker*, J. reine angew. Math. 9 (1832), p. 125; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 225; System der Geom. des Raumes[32]), p. 82; *L. O. Hesse*, Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 173; **E. Pruvost*, Géom. analyt.[20]) 2, p. 118; *B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]) 3, p. 227.*

99) *O. Staude*, Analytische Geometrie des Punktepaares, des Kegelschnittes und der Fläche zweiter Ordnung 1, Leipzig et Berlin 1910, p. 781.

Les cinq premiers cas sont, sous une autre forme, ceux qu'avait signalés *L. Euler*[100]) [cf. n° **14**].

J. Plücker[101]) a établi la distinction précise qui existe entre ce mode de classification et ceux qui résultent de l'emploi des coordonnées tétraédriques [n^{os} **16** et **18**], en utilisant la notion de plan de l'infini, telle qu'elle résulte des travaux de *J. V. Poncelet*[41]).

18. Classification en coordonnées tétraédriques. La décomposition de la forme f à coefficients réels en une somme de carrés a conduit *J. Plücker*[102]) à distinguer diverses *espèces* de surfaces du second ordre, suivant la valeur de r [cf. n° **16**] et les signes des coefficients b_i. D'après la *loi de l'inertie des formes quadratiques*[103]), le nombre de ces coefficients qui ont un signe déterminé est, en effet, caractéristique de la forme f.

On distingue ainsi trois espèces de surfaces propres:

1°) la *surface imaginaire* $(+ + + +)$[104]);

2°) la *surface réglée* $(+ + - -)$;

3°) la *surface non réglée* $(+ + + -)$;

deux espèces de cônes:

4°) *cône imaginaire* $(+ + +)$;

5°) *cône réel* $(+ + -)$;

deux espèces de couples de plans:

6°) plans *imaginaires* $(+ +)$;

7°) *plans réels* $(+ -)$;

enfin, une seule espèce:

8°) le *plan double.*

Les critères analytiques relatifs à chaque espèce résultent des signes des valeurs de la fonction f aux différents sommets d'un tétraèdre conjugué par rapport à la surface $f = 0$[105]). Ils dépendent

100) *L. Euler*, Introd.[7]) 2, p. 380/5; trad. *J. B. Labey* 2, p. 385/90. D'après *L. Euler*, les critères relatifs à (1°) sont $\alpha_{11} > 0$, $\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{33} > 0$, $a_{11} A_{44} > 0$, qui caractérisent une forme quadratique définie $f(x, y, z, 0)$; voir *C. F. Gauss*, Disquisitiones arithmeticae, Leipzig 1801, n° 271; trad. *A. Ch. M. Poullet-Delisle*, Recherches arithmétiques, Paris 1806; Werke 1, Göttingue 1870, p. 305. Pour les types (3°) à (5°), *L. Euler* donne la condition $A_{44} = 0$.

101) *J. Plücker*, System der Geom. des Raumes[32]), p. 135.

102) *J. Plücker*, System der Geom. des Raumes[32]), p. 75, 134.

103) Voir l'article I 11, n° 2.

104) *F. Klein* [Vorlesungen über höhere Geometrie (autographié) 1, Göttingue 1892/3, p. 355] réserve le nom *d'imaginaire* à une surface dont l'équation est à coefficients imaginaires; la surface du type (1°) est appelée par lui *sans aucune partie (nullteilige)*.

105) *J. Plücker*, System der Geom. des Raumes[32]), p. 89, donne des critères nécessaires, sans rechercher s'ils sont suffisants; *A. Clebsch*, Vorlesungen über Geo-

du choix de ce tétraèdre et l'on peut répartir ces critères en deux catégories, suivant que l'on considère un tétraèdre conjugué par rapport à la surface $f=0$ prise isolément ou un tétraèdre conjugué par rapport à cette surface et par rapport à une autre quadrique donnée.

A la première catégorie appartiennent les critères donnés par *J. Plücker*. Relativement à l'espèce 1°), par exemple, c'est le critère

$$A>0,\ \alpha_{33}>0,\ \alpha_{11}A_{44}>0$$

formé de conditions analogues à celles que *L. I. Magnus* avait déjà trouvées, sans faire intervenir la notion précise d'espèce, dans l'hypothèse $\alpha_{33}>0$, à savoir

$$A>0,\ \alpha_{11}>0,\ A_{44}>0.$$

A cette même catégorie se rattachent les critères de *C. G. J. Jacobi* et de *K. Weierstrass*, ainsi que ceux qui ont été obtenus à l'aide de paramètres indéterminés par *G. Darboux*[106]).

Les critères de la seconde catégorie sont obtenus en prenant un tétraèdre conjugué commun[107]) à la surface $f=0$ et à la surface

$$g = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0;$$

les signes des r coefficients b_i dépendent alors des variations que présentent les coefficients d'une équation du quatrième degré; ces coefficients sont des invariants de la forme f pour toute transformation du tétraèdre des coordonnées qui conserve g, en d'autres termes pour toute substitution orthogonale. Relativement à l'espèce 1°) on trouve ainsi le critère

$$A>0, \sum_{i=1}^{i=6}\alpha_{ii}>0,\ \sum_{i=1}^{i=4}A_{ii}\sum_{i=1}^{i=4}\alpha_{ii}>0.$$

19. Classification complète. En combinant les résultats obtenus [n^os **17** et **18**], on obtient une classification complète des surfaces du second ordre; toutefois, les deux modes de classification, celui du

metrie, publ. par *F. Lindemann* 2[1], Leipzig 1891, p. 158, 164; voir les développements synthétiques de *K. G. Chr. von Staudt,* Beiträge zur Geometrie der Lage, fasc. 1, Nuremberg 1856, p. 111; *H. Schröter,* Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung, Leipzig 1880, p. 166.

106) *J. Plücker,* System der Geom. des Raumes[32]), p. 54; *L. I. Magnus,* Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 2, p. 221; *C. G. J. Jacobi,* J. reine angew. Math. 53 (1857), p. 865; Werke 3, Berlin 1884, p. 583; *K. Weierstrass,* Monatsb. Akad. Berlin 1868, p. 316; Werke 2, Berlin 1895, p. 26; *G. Darboux,* J. math. pures appl. (2) 19 (1874), p. 347; *S. Gundelfinger* dans *L. O. Hesse,* Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 462.

107) *A. L. Cauchy,* Exercices math. 4, Paris 1829, p. 140; Œuvres (2) 9, Paris 1891, p. 174; *C. G. J. Jacobi,* J. reine angew. Math. 12 (1834), p. 1; Werke 3, Berlin 1884, p. 193; *K. Weierstrass,* Monatsb. Akad. Berlin 1858, p. 207; Werke 1, Berlin 1894, p. 240.

n° **17** et celui du n° **18**, n'étant pas absolument indépendants, certaines combinaisons n'interviennent pas. On peut dresser ainsi le Tableau suivant, qui résume la classification due aux recherches analytiques de *A. L. Cauchy*, *L. I. Magnus*, *J. Plücker*[108]) et que l'on peut retrouver également par voie synthétique[109]):

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	Ellipsoïde imaginaire		Ellipsoïde réel	Cône imaginaire				
2		Hyperboloïde à 1 nappe	Hyperpoloïde à 2 nappes		Cône réel			
3			Paraboloïde elliptique	Cylindre imaginaire	Cylindre elliptique	Plans imaginaires concourants		
4		Paraboloïde hyperbolique			Cylindre hyperbolique		Plans réels concourants	
5					Cylindre parabolique	Plans imaginaires parallèles	Plans réels parallèles	Plan double à distance finie
6							Plan à distance finie et Plan de l'infini	Plan double à l'infini

108) *A. L. Cauchy*, Applic. du calcul infin. à la géom.[36]) 1, p. 253; Œuvres (2) 5, p. 264; Exercices math. 3, Paris 1828, p. 87; Œuvres (2) 8, Paris 1890, p. 102; *L. I. Magnus*, Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 2, p. 221; *J. Plücker,* System der Geom des Raumes[32]), p. 73; *L. O. Hesse*, Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 253; *S. Gundelfinger* dans *L. O. Hesse*, Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 465; *A. Clebsch,* Geom.[105]) 2[1], p. 161; *K. Hensel*, J. reine angew. Math. 113 (1894), p. 303; *Ch. Méray*, Nouv. Ann. math. (3) 11 (1892), p. 474;* *H. E. Timerding*, J. reine angew. Math. 122 (1900), p. 172; *T. J. Bromwich*, Proc. Cambr. philos. Soc. 10 (1898/1900), p. 358; *C. Köhler*, Archiv Math. Phys. (3) 3 (1902), p. 21, 94; *L. Heffter*, J. reine angew. Math. 126 (1903), p. 83; *S. Gundelfinger*, J. reine angew. Math. 127 (1904), p. 85.

Au sujet des critères correspondant au Tableau donné dans le texte voir *O. Staude*, Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 539.

109) *F. Seydewitz*, Archiv Math. Phys. (1) 9 (1847), p. 201.

Les noms donnés à ces différentes surfaces sont dus à *L. Euler*, à *G. Monge* et à *J. N. P. Hachette*[110]).

20. Les surfaces de seconde classe. *La surface de seconde classe a été étudiée systématiquement d'abord par *J. Plücker*[111]).

J. D. Gergonne[112]) avait déjà considéré une quadrique propre comme enveloppe de ses plans tangents et l'application de la théorie des polaires réciproques avait permis d'établir le lien qui unit les deux façons de définir une quadrique.

L'étude générale des surfaces de seconde classe, définie par une équation tangentielle du second degré, a été faite, en particulier par *L. F. Painvin* et *G. Papelier*[113]) qui ont donné une nouvelle classification de ces surfaces et ont repris l'étude de leurs propriétés en utilisant uniquement les coordonnées tangentielles.*

J. Plücker[111]) a établi qu'il y a identité entre les surfaces propres de seconde classe et les surfaces propres du second ordre. La surface du second ordre $f=0$ a pour équation tangentielle

$$F = F(u_1, u_2, u_3, u_4) = \sum_{(i,k)} A_{ik} u_i u_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4);$$

F est le déterminant[114])

$$|a_{ik}, u_i|$$

déduit du discriminant de f en bordant ce dernier avec les u_i; on peut le représenter par la notation symbolique[115])

$$F = \tfrac{1}{6}(abcu)^2.$$

Les quadriques impropres ne sont pas de même multiplicité suivant qu'on les considère au point de vue tangentiel ou au point de vue ponctuel. Le cône du second ordre (multiplicité double de points) est représenté d'après *J. Plücker*[116]) en coordonnées tangentielles par deux équations (multiplicité simple de plans). L'expression F est alors, comme l'a montré *L. O. Hesse*[117]), le carré d'une forme linéaire de u_1, u_2, u_3, u_4. Les surfaces impropres de seconde classe correspondent à l'ensemble des plans tangents à une conique[118]) (*multiplicité double de plans et multiplicité simple de points*). *H. Schubert* a approfondi l'étude des surfaces impropres en les concevant à la fois comme ensembles de points et de plans[119]).

En reprenant l'étude de la forme quadratique quaternaire F, on est aisément conduit à considérer comme surfaces impropres de seconde classe une conique à distance finie ou infinie, un système de deux points à distance finie ou infinie, un point double à distance finie ou infinie, qui correspondent à des multiplicités doubles de plans, à des multiplicités simples de points ou même à des points en nombre fini; ce nombre fini ne peut être que 2 ou 1[120]).

21. Centre. L'existence du centre de certaines quadriques a été mise en évidence par *L. Euler*, par *G. Monge* et par *J. N. P. Hachette* en établissant qu'il était possible de les représenter par des équations ne renfermant pas de termes du premier degré[121]).

**A. L. Cauchy*[121]) a discuté complètement le problème de la recherche du centre d'une quadrique et a montré qu'une quadrique pouvait avoir une infinité de centres; cette discussion est analogue à celle qui permet la classification par les points doubles et par la conique de l'infini. La détermination du centre a été ramenée par *J. V. Poncelet* à celle du pôle du plan de l'infini; cette remarque permet de le déterminer simplement en coordonnées tangentielles[122]).*

22. Plans diamétraux, diamètres. *G. Monge* et *J. N. P. Hachette* sont parvenus à établir les notions de diamètre et de plan diamétral en considérant, en coordonnées obliques, l'équation d'une surface à centre, dans laquelle ne figurent que les carrés des variables. La théorie analytique des diamètres et des plans diamétraux a été établie com-

110) *L. Euler* [Introd.[7]) 2, p. 381/5] dit elliptoïde ou [trad. *J. B. Labey* 2, p. 386/91] ellyptoïde; *G. Monge* et *J. N. P. Hachette* [J. Ec. polyt. (1) cah. 11 (an X), p. 158] disent ellipsoïde.

111) *J. Plücker*, Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 225; System der Geom. des Raumes[32]), p. 22, 321.

112) *J. D. Gergonne*, Ann. math. pures appl. 18 (1827/8), p. 152; cf. *J. V. Poncelet*, id. 16 (1825/6), p. 209.

113) **L. F. Painvin*, Géom. analyt.[28]) 2, première partie, p. 230, 289, 326, 337, 353, 424; *G. Papelier*, Coord. tangent.[69]) 2, p. 144.*

114) *A. Clebsch*, J. reine angew. Math. 53 (1857), p. 294.

115) *A. Clebsch*, J. reine angew. Math. 59 (1861), p. 56.

116) *J. Plücker*, J. reine angew. Math. 9 (1832), p. 12; Wiss. Abh. 1, p. 229.

117) *L. O. Hesse*, Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 164; **G. Papelier*, Coord. tangent.[69]) 2, p. 158.*

118) *J. Plücker*, System der Geom. des Raumes[32]), p. 82; *K. G. Chr. von Staudt*, Beiträge zur Geometrie der Lage, fasc. 1, Nuremberg 1856, p. 22; *L. O. Hesse*, Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 173; c'est la *surface limite* de *Ch. Dupin*, Géom.[9]), p. 277, 309; voir plus loin ce qui concerne les propriétés focales des quadriques.

119) *H. Schubert*, Kalkül der abzählenden Geometrie, Leipzig 1879, p. 102; *A. Clebsch*, Geom.[105]) 2[1], p. 201.

120) **G. Papelier*, Coord. tangent.[69]) 2, p. 154.*

121) *L. Euler* [Introd.[7]) 2, p. 384; trad. *J. B. Labey* 2, p. 389] signale aussi le cas du paraboloïde; *G. Monge* et *J. N. P. Hachette*, Applic. de l'algèbre à la géométrie[88]), p. 27, où est donnée la condition $A_{44} = 0$ relative au centre rejeté à l'infini; *A. L. Cauchy*, Applic. du calcul infin. à la géom.[36]) 1, p. 234; Œuvres (2) 5, p. 248; *O. Staude*, Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 947, note 92.

122) *J. V. Poncelet*, Propriétés projectives[41]), (1re éd.) p. 380; (2e éd.) 1, p. 369; J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 19, 21.

plètement par *A. L. Cauchy*, et *J. V. Poncelet*[123]) a ramené leur étude à celle des plans polaires des points à l'infini et des droites conjuguées des droites de l'infini.

*Si l'on se borne à considérer le diamètre comme lieu de centres de sections parallèles et le plan diamétral comme lieu de milieux de cordes parallèles, les équations qui définissent les diamètres et les plans diamétraux ne peuvent être acceptées que sous certaines restrictions, qui disparaissent au point de vue analytique par la conception de diamètres et plans diamétraux singuliers; ces derniers éléments s'introduisent d'eux-mêmes si l'on se place au point de vue de *J. V. Poncelet*; ce dernier point de vue donne d'ailleurs un moyen simple de recherche des diamètres et plans diamétraux en coordonnées tangentielles. Tous les diamètres et les plans diamétraux passent par le centre; un diamètre est l'intersection de deux plans diamétraux et réciproquement; il y a réciprocité entre un diamètre et le plan diamétral conjugué; dans les surfaces à centre, il existe une infinité de systèmes de trois diamètres conjugués[124]).*

La considération des diamètres et, en particulier, des systèmes de diamètres conjugués a permis d'établir de nombreuses propriétés métriques découvertes par *Livet, J. P. M. Binet* et *M. Chasles*[125]).

23. Tangentes conjuguées. *Ch. Dupin* introduisit la notion de tangentes conjuguées en un point; ce sont deux tangentes en un point de la surface, qui sont parallèles à deux diamètres conjugués. *Ces droites forment un faisceau harmonique avec les deux génératrices de la surface qui passent par leur point de contact; si une développable circonscrite passe par ce point, sa génératrice et la tangente à la courbe de contact avec la surface sont conjuguées; si ces tangentes sont constamment rectangulaires le point est un *ombilic* de la surface[126]).*

123) *G. Monge* et *J. N. P. Hachette*, Applic. de l'algèbre à la géométrie[88]), p. 28, 30; *A. L. Cauchy*, Exercices math. 3, Paris 1828, p. 3, 32; Œuvres (2) 8, Paris 1890, p. 12, 47; *J. V. Poncelet* [Propriétés projectives[41]), (1re éd.) p. 396; (2e éd.) 1, p. 386] considère le système de trois diamètres conjugués comme cas particulier d'un tétraèdre conjugué par rapport à la quadrique; *J. Plücker*, J. reine angew. Math. 5 (1830), p. 19; System der Geom. des Raumes[32]), p. 93; *K. G. Chr. von Staudt* [Von den reellen und imaginären Halbmessern der Kurven und Flächen 2. Ordnung, Nuremberg 1867, p. 39] considère le système de trois diamètres conjugués comme trièdre conjugué dans la théorie des polaires relative à un réseau.

124) **Ch. A. A. Briot* et *J. C. Bouquet*, Géom. analyt.[21]), p. 585; *E. Pruvost*, Géom. analyt.[20]) 2, p. 138; *B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]) 3, p. 220; *L. F. Painvin*, Géom. analyt.[28]) 2, première partie, p. 338; *G. Papelier*, Coord. tangent.[65]) 2, p. 207.*

125) *Livet*, Correspondance sur l'Ec. polyt. 1 (1804/8), p. 29; J. Ec. polyt. (1) cah. 13 (1806), p. 270; *J. P. M. Binet*, Correspondance sur l'Ec. polyt. 2 (1809/13), p. 323; J. Ec. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 321; *M. Chasles*, Correspondance sur l'Ec. polyt. 3 (1814/6), p. 202; J. math. pures appl. (1) 2 (1837), p. 388; *J. Steiner*, J. reine und angew. Math. 31 (1846), p. 90; Werke 2, Berlin 1882, p. 357; *L. I. Magnus*, Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]), p. 237; *K. G. Chr. von Staudt*, Reelle und imaginäre Halbmesser[123]), p. 50.

24. Les directions principales. Le problème de la recherche des directions principales a été traité à deux points de vue.

On a d'abord considéré la *seule* surface donnée et on a cherché soit à faire disparaitre les termes rectangles de son équation en effectuant une rotation d'axes rectangulaires[127]), soit à déterminer un diamètre normal à la surface[128]), soit à déterminer la direction du diamètre qui aboutit au point de contact de la surface et d'une sphère concentrique et tangente à la surface[129]), soit à trouver le maximé ou le minimé de longueur d'un diamètre[130]), soit à déterminer une direction normale au plan diamétral conjugué[131]), ou encore à trouver un système de trois diamètres conjugués rectangulaires. *Il faut remarquer que certaines de ces recherches sont relatives aux axes des surfaces plutôt qu'aux directions principales.*

On a, d'autre part, considéré le système des directions principales comme système de directions conjuguées communes à la surface et à une sphère[132]), ou on a cherché le triangle conjugué commun à la conique de l'infini de la surface et à l'ombilicale; cela revient à la transformation simultanée en sommes de carrés des deux formes[133])

$$f(x, y, z) \text{ et } x^2 + y^2 + z^2.$$

Dans tous les cas, on est conduit à une équation du troisième degré pour déterminer les *cosinus directeurs* des directions principales,

126) *Ch. Dupin*, Géom.[9]), p. 44; *K. G. Chr. von Staudt*, Reelle und imaginäre Halbmesser[123]), p. 38.

127) *L. Euler*, Introd.[7]) 2, p. 380; trad. *J. B. Labey* 2, p. 385; *G. Monge* et *J. N. P. Hachette*, Applic. de l'algèbre à la géom.[88]), p. 46/9.

128) *J. N. P. Hachette*, Correspondance sur l'Ec. polyt. 2 (1809/13), p. 417.

129) *G. Monge*, Correspondance sur l'Ec. polyt. 2 (1809/13), p. 415.

130) *A. L. Cauchy*, Applic. du calcul infin. à la géom.[36]) 1, p. 234, 240; Œuvres (2) 5, p. 248, 254.

131) *J. P. M. Binet*, Correspondance sur l'Ec. polyt. 2 (1809/13), p. 17; *A. L. Cauchy*, Exercices math. 3, Paris 1828, p. 5; Œuvres (2) 8, Paris 1890, p. 14; *J. Plücker*, J. reine angew. Math. 24 (1842), p. 60; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 387.

132) *M. Chasles*, Correspondance sur l'Ec. polyt. 3 (1814/6), p. 330; *J. V. Poncelet*, Propriétés projectives[41]), (1re éd.) p. 399; (2e éd.) 1, p. 390; *L. O. Hesse*, J. reine angew. Math. 18 (1838), p. 101; Werke, Munich 1897, p. 1; Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 244.

133) *A. L. Cauchy*, Exercices math. 4, Paris 1829, p. 148; Œuvres (2) 9, Paris 1891, p. 182; *C. G. J. Jacobi*, J. reine angew. Math. 12 (1834), p. 1; Werke 3, Berlin 1884, p. 193; *L. F. Painvin*, Nouv. Ann. math. (2) 13 (1874), p. 113.

et à une équation du troisième degré pour déterminer les *inverses des carrés* des longueurs des axes.

La première a été donnée par *L. Euler*, puis, plus tard, par *J. N. P. Hachette* et *S. D. Poisson*, *J. P. M. Binet* et *P. L. M. Bourdon*[134]). On peut l'écrire, en désignant par α, β, γ les cosinus directeurs d'une direction principale,

$$A_3\beta^3 - \left(\frac{a_{31}}{a_{23}}A_1 + \frac{a_{22}-a_{33}}{a_{23}}A_3 - A_2\right)\beta^2\gamma + \left(\frac{a_{12}}{a_{23}}A_1 - \frac{a_{22}-a_{33}}{a_{23}}A_2 - A_3\right)\beta\gamma^2 - A_2\gamma^3 = 0$$

où

$$A_1 = (a_{22} - a_{33})a_{31}a_{12} + a_{23}(a_{31}^2 - a_{12}^2)$$

et où A_2, A_3 se déduisent de A_1 par permutations circulaires sur les indices; on suppose essentiellement que

$$a_{23}(a_{31}^2 + a_{12}^2)$$

est différent de zéro.

Deux autres équations analogues fournissent $\frac{\gamma}{\alpha}$ et $\frac{\alpha}{\beta}\cdot$

L. Euler, ainsi que *J. N. P. Hachette* et *S. D. Poisson*, ont montré que ces équations ont leurs racines réelles.

La seconde équation, appelée l'équation en S, fut donnée d'abord en coordonnées rectangulaires par *J. N. P. Hachette* et *A. Petit*[135]), puis par *A. L. Cauchy*, qui la mit sous forme de déterminant[136]); *J. P. M. Binet* obtint cette équation en supposant les axes obliques[137]).

En désignant par λ, μ, ν les angles des axes, on peut écrire cette équation sous la forme suivante:

$$\Delta(S) = \begin{vmatrix} a_{11} - S & a_{12} - S\cos\nu & a_{13} - S\cos\mu \\ a_{21} - S\cos\nu & a_{22} - S & a_{23} - S\cos\lambda \\ a_{31} - S\cos\mu & a_{32} - S\cos\lambda & a_{33} - S \end{vmatrix} = 0.$$

On a établi, en supposant les axes rectangulaires, que cette

134) *L. Euler*, Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum, Rostock et Greifswald 1765, p. 172; *J. N. P. Hachette* et *S. D. Poisson*, J. Ec. polyt. (1) cah. 11 (an X), p. 170; *J. P. M. Binet*, Correspondance sur l'Ec. polyt. 2 (1809/13), p. 17, 18; *P. L. M. Bourdon*, Correspondance sur l'Ec. polyt. 2 (1809/13), p. 250 [1811]. La méthode de *L. Euler* est déjà indiquée dans *J. A. de Segner*, Specimen theoriae turbinum, Halle 1755 [cf. *H. R. Baltzer*, Determ.[94]), (4e éd.) Leipzig 1875, p. 192].

135) *J. N. P. Hachette* et *A. Petit*, Correspondance sur l'Ec. polyt. 2 (1809/13), p. 324, 327 [1812]; *A. L. Cauchy*, Applic. du calcul infin. à la géom.[86]) 1, p. 240; Œuvres (2) 5, p. 254.

136) *A. L. Cauchy*, Exercices math. 4, Paris 1829, p. 142; Œuvres (2) 9, Paris 1891, p. 176.

137) *J. P. M. Binet*, J. Ec. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 50; *C. G. J. Jacobi*, J. reine angew. Math. 2 (1827), p. 231; Werke 3, Berlin 1884, p. 51; *J. Plücker*, System der Geom. des Raumes[32]), p. 219; *H. R. Baltzer*, Analyt. Geom.[95]), p. 512.

équation a ses racines réelles, soit par des procédés particuliers, en séparant les racines[138]); soit en utilisant la décomposition en carrés indiquée d'abord par *E. E. Kummer*[139]); soit en faisant intervenir le théorème général relatif à la réalité des racines du discriminant d'un faisceau de formes de n variables, quand il existe dans ce faisceau au moins une forme *définie* propre[140]).

Ch. Brisse et *S. Gundelfinger* ont montré que l'équation en S, relative aux coordonnées obliques, a ses racines réelles[141]).

Ces différentes méthodes permettent d'établir que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation en S ait une racine double est que cette racine annule tous les mineurs du premier ordre de $\Delta(S)$, résultat qui peut d'ailleurs être obtenu directement[142]).

A chaque racine simple correspond une direction principale; à une racine double correspondent une infinité de directions principales parallèles à un même plan; deux directions principales qui correspondent à deux racines distinctes sont rectangulaires[143]).

138) *J. L. Lagrange*, Nouv. Mém. Acad. Berlin 4 (1773), éd. 1775, p. 110; Œuvres 3, Paris 1869, p. 605; *A. L. Cauchy*, Applic. du calcul infin. à la géom.[86]) 1, p. 247; Exercices math. 4, Paris 1829, p. 151; Œuvres (2) 5, Paris 1903, p. 256; (2) 9, Paris 1891, p. 185/6; *C. G. J. Jacobi*, J. reine angew. Math. 12 (1834), p. 10; Werke 3, Berlin 1884, p. 210; *B. Amiot*, J. math. pures appl. (1) 8 (1843), p. 200; *J. J. Sylvester*, London Edinb. Dublin philos. mag. (4) 4 (1852), p. 138/42; Papers 1, Cambridge 1904, p. 378/81; *J. A. Grunert*, Archiv. Math. Phys. (1) 29 (1857), p. 442/6; *L. O. Hesse*, Analyt. Geom. des Raumes[16]), (3e éd.) p. 254; *A. Clebsch*, J. reine angew. Math. 62 (1863), p. 232; *L. Kronecker*, Monatsb. Akad. Berlin 1868, p. 339; Werke 1, Leipzig 1895, p. 165; *K. Weierstrass*, Monatsb. Akad. Berlin 1879, p. 430/9; Werke 3, Berlin 1903, p. 139/48; **F. Walecki*, Nouv. Ann. math. (3) 2 (1883), p. 241;* *K. Hensel*, J. reine angew. Math. 110 (1892), p. 180/3.

139) *E. E. Kummer*, J. reine angew. Math. 26 (1843), p. 268; *C. W. Borchardt*, J. reine angew. Math. 30 (1846), p. 38/45; J. math. pures appl. (1) 12 (1847), p. 50; Werke, Berlin 1888, p. 3, 15; *C. G. J. Jacobi*, J. reine angew. Math. 30 (1846), p. 46/50; Werke 3, Berlin 1884, p. 461/5; *G. Bauer*, J. reine angew. Math. 71 (1870), p. 40; *L. O. Hesse*, J. reine angew. Math. 57 (1860), p. 175; Werke, Munich 1897, p. 489; *C. F. Geiser*, J. reine angew. Math. 82 (1877), p. 47; *E. Sourander*, J. math. pures appl. (3) 5 (1879), p. 195.

140) *K. Weierstrass*, Monatsb. Akad. Berlin 1858, p. 213; Werke 1, Berlin 1894, p. 238/9; *H. R. Baltzer*, Analyt. Geom.[95]), p. 508.

141) *Ch. Brisse*, Nouv. Ann. math. (3) 1 (1882), p. 193/7, 207/16; *S. Gundelfinger*, Nouv. Ann. math. (3) 3 (1884), p. 7/12.

142) **H. Laurent*, Nouv. Ann. math. (3) 10 (1891), p. 503/7; *B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]) 3, p. 248.*

143) **A. L. Cauchy*, Exercices math. 4, Paris 1829, p. 142; Œuvres (2) 9, Paris 1891, p. 176; *Ch. A. A. Briot* et *J. C. Bouquet*, Géom. analyt.[21]), p. 603; *B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]) 3, p. 250.*

A. L. Cauchy[144]) a remarqué que l'équation a pour coefficients des invariants relatifs à une transformation de coordonnées rectangulaires, invariants simultanés de la surface et du cône isotrope[145]). L'invariance des coefficients en axes obliques met en évidence une partie des propriétés des diamètres conjugués découvertes par *Livet, J. P. M. Binet* et *M. Chasles*[146]).

Si au lieu de considérer les surfaces du second ordre, on considère les surfaces de seconde classe, on est conduit dans la recherche des plans principaux à des calculs analogues aux précédents. Dans les surfaces du second ordre, un plan principal correspond à une racine non nulle. Dans les surfaces de seconde classe, si l'équation en S a une racine nulle la surface est dégénérée et se réduit à une conique ou à un système de deux points; à une racine nulle simple (cas d'une conique) correspond le plan de la conique; dans le cas d'un système de deux points il y a une racine double nulle correspondant à tous les plans menés par la droite qui joint ces deux points; dans le cas d'un point double il y a une racine nulle triple correspondant à tous les plans passant par ce point[147]).

25. Équations canoniques et formes des quadriques. Les équations *réduites* ou *canoniques* des quadriques réelles propres furent données d'abord par *L. Euler*, puis par *G. Monge* et *J. N. P. Hachette* et leur ont permis d'étudier leurs formes[148]); ce sont

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1,$$
$$\frac{y^2}{p} \pm \frac{z^2}{q} - 2x = 0 \qquad (\text{où } pq > 0).$$

L. Euler a représenté d'une manière insuffisante les quadriques en projetant obliquement les trois sections principales sur le plan de l'une d'elles. La représentation projective complète fut donnée par *G. Monge* et *J. N. P. Hachette*[149]).

144) *A. L. Cauchy,* Applic. du calcul infin. à la géom.[86]) 1, p. 244; Œuvres (2) 5, Paris 1903, p. 252; *J. Plücker,* J. reine angew. Math. 24 (1842), p. 283; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 390. Il résulte de cette propriété que la somme des inverses des carrés de trois diamètres rectangulaires est constante.

145) Sur ces invariants absolus, voir *A. Clebsch*, Geom.[105]) 2^1, p. 193; **Ch. A. A. Briot* et *J. C. Bouquet*, Géom. analyt.[21]), p. 615.*

146) **L. F. Painvin*, Géom. analyt.[28]) 2, première partie, p. 433; *Ch. A. A. Briot* et *J. C. Bouquet*, Géom. analyt.[21]), p. 623; *E. Pruvost*, Géom. analyt.[20]) 2, p. 201, 218; *B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]) 3, p. 297.*

147) **L. F. Painvin*, Géom. analyt.[28]) 2, première partie, p. 425; *G. Papelier*, Coord. tangent.[69]) 2, p. 216.*

148) *L. Euler*, Introd.[7]) 2, p. 382/5; trad. *J. B. Labey* 2, p. 385/90; *G. Monge* et *J. N. P. Hachette*, Applic. de l'algèbre à la géom.[88]), p. 49.

149) *L. Euler*, Introd.,[7]) 2, fig. 143—147; *G. Monge* et *J. N. P. Hachette*, Applic. de l'algèbre à la géom.[88]), p. 54; *J. N. P. Hachette*, Correspondance sur l'Ec. polyt. 2 (1809/13), p. 329 [1812]. Des modèles en plâtre des quadriques ont été construits à Paris: ils se trouvent au Conservatoire des Arts et métiers; plus tard on en a aussi construit à Munich sous la direction de *A. Brill* et de *R. Diesel*; cf. *W. von Dyck*, Katalog math. und math.-phys. Modelle, Apparate und Instrumente, Munich 1892, p. 258.

Les quadriques peuvent être représentées par des équations de même forme que les équations canoniques en faisant usage d'axes obliques: leurs équations tangentielles ont également la même forme, si l'on conserve les mêmes axes de coordonnées[150]).

26. Quadriques particulières. Les conditions pour qu'une quadrique soit de révolution ont été obtenues depuis *G. Monge* par différents procédés:

1°) par une méthode directe, en utilisant l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution, donnée par *G. Monge*, ou encore en partant de la forme de l'équation générale des surfaces de révolution, ainsi que l'ont fait *P. L. M. Bourdon*[151]), *A. Mondot*[152]) et *G. Lamé*[153]);

2°) en se servant de l'équation en S: à cet effet, *P. L. M. Bourdon*[154]) écrit qu'il y a une infinité de directions principales en annulant les coefficients d'une équation entre les cosinus directeurs [cf. n° **24**]; *A. L. Cauchy*[155]) et *J. Plücker*[156]) écrivent que l'équation en S, relative aux coordonnées rectangulaires, a une racine double; *J. Plücker* écrit encore qu'un axe est indéterminé. *K. Weierstrass*[157]) a montré que l'existence du double contact entre une quadrique de révolution et le cône isotrope est une conséquence de l'égalité de deux racines de l'équation en S.

*Des considérations analogues permettent d'écrire qu'une quadrique est de révolution, quand on donne son équation en coordonnées tangentielles; on écrira que l'équation en S a une racine double. Tout ceci suppose d'ailleurs que la racine double n'est pas nulle; en coordonnées ponctuelles, une surface pour laquelle l'équation en S a une racine double nulle est un cylindre parabolique ou un système

150) **L. F. Painvin*, Géom. analyt.[28]) 2, première partie p. 20; *G. Papelier*, Coord. tangentielles[69]) 2, p. 240.*

151) Correspondance sur l'Éc. polyt. 2 (1809/13), p. 199 [1812].

152) Id. 2 (1809/13), p. 205 [1811]

153) Examen[44]), p. 43.

154) Correspondance sur l'Éc. polyt. 2 (1809/13), p. 252 [1811].

155) Exercices math. 3, Paris 1828, p. 20; Œuvres (2) 8, Paris 1890, p. 3 2

156) J. reine angew. Math. 24 (1842), p. 283; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895 p. 396; System der Geom. des Raumes[32]), p. 175.

157) Monatsb. Akad. Berlin 1858, p. 214; Werke 1, éd. Berlin 1894, p. 240 cf. *K. G. Chr. von Staudt*, Beiträge zur Geometrie der Lage, fasc. 1, Nuremberg 1856, p. 129.

de plans parallèles; dans ce dernier cas, on peut considérer la surface comme de révolution autour d'un axe quelconque perpendiculaire aux deux plans. En coordonnées tangentielles, l'existence d'une racine double nulle de l'équation en S correspond à l'ensemble de deux points dont l'un est à l'infini[158]).*

Si l'équation en S a une racine triple non nulle, la surface est une *sphère*, dont on peut mettre l'équation sous la forme[159]) (coordonnées rectangulaires ponctuelles)

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0,$$

le premier membre étant, pour un point quelconque (x, y, z), la puissance de ce point par rapport à la sphère. Une sphère de rayon nul est une *sphère-point* ou un *cône isotrope.* Elle est coupée par le plan de l'infini suivant *l'ombilicale*[160]), dont la notion est due à *J. V. Poncelet.*

Une quadrique est dite *équilatère* si la somme des racines de l'équation en S est nulle; ainsi l'hyperboloïde ou le cône [n^os **38, 52**]

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\varepsilon \qquad (\varepsilon=0,\ 1 \text{ ou } -1)$$

est équilatère[161]) si

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0.$$

Le cône équilatère est capable d'une infinité de trièdres trirectangles inscrits. Le paraboloïde hyperbolique

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}+2z=0$$

est équilatère[162]) si $p=q$; *il est caractérisé par ce fait que ses plans directeurs sont rectangulaires.*

*A la surface équilatère correspond par dualité, en coordonnées

158) *G. Papelier,* Coord. tangent.[69]) 2, p. 230.*

159) *L. O. Hesse,* Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 346.

160) *J. V. Poncelet,* Propriétés projectives[41]), (1^re éd.), p. 377, 397, 404; (2^e éd.) 1, p. 370, 388/90, 396/8; voir *K. G. Chr. von Staudt,* Beiträge zur Geometrie der Lage, fasc. 1, Nuremberg 1856, p. 129; *L. O. Hesse,* Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 338 (l'équation de l'ombilicale est en coordonnées tangentielles $u^2+v^2+w^2=0$). *G. Papelier,* Coord. tangent.[69]) 2, p. 167; *E. N. Laguerre,* Bull. Soc. philom. Paris (6) fasc. 7 (1870), p. 95; Œuvres 2, Paris 1905, p. 110.*

161) *L. I. Magnus* [Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]), p. 323] a signalé le cône équilatère; *J. Plücker* [System der Geometrie des Raumes[32]), p. 156, 205] a considéré l'hyperboloïde équilatère; d'autres recherches sur ces surfaces sont dues à *F. Joachimsthal,* J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 284; *H. Vogt,* J. reine angew. Math. 86 (1879), p. 297; *H. Schröter,* Oberflächen zweiter Ordnung[105]), p. 75, 195.

162) *J. Steiner,* Syst. Entw.[85]), p. 211; Werke 1, Berlin 1881, p. 380; *L. I. Magnus,* Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]), p. 249; *A. Schoenflies,* Z. Math. Phys. 23 (1878), p. 245.

tangentielles, une surface, dont le cône asymptote est capable d'une infinité de trièdres trirectangles circonscrits; l'équation en S (en coordonnées ponctuelles) est alors telle que la somme des inverses de ses racines soit nulle. Ces surfaces (à centre) n'ont pas reçu de nom français particulier. Les auteurs allemands les désignent sous le nom de *réciproque équilatère* (*dual-gleichseitig*).*

Une surface est dite *orthogonale*[163]) si une racine de l'équation en S (coordonnées ponctuelles) est égale à la somme des deux autres; ainsi l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

est orthogonal, si [n° **51**]

$$\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}.$$

Les auteurs allemands appellent *réciproque orthogonale* (*dual-orthogonal*) une surface pour laquelle l'inverse d'une racine est la somme des inverses des deux autres.

Comme autres variétés de cônes, on peut citer le *cône de Pappus,* le *cône de Hachette,* le cône à focales orthogonales, le cône dont les plans de sections circulaires sont orthogonaux[164]) [cf. n° **51**].

Quadriques et droites.

27. Intersection d'une droite et d'une quadrique. *A. L. Cauchy*[165]) a fait reposer en grande partie l'étude des quadriques sur celle de l'intersection d'une quadrique avec une droite. *C'est d'ailleurs à cela

163) Le mot *orthogonal* appliqué à ces surfaces est dû à *H. Schröter,* J. reine angew. Math. 85 (1878), p. 26; mais, avant lui, le cône et l'hyperboloïde orthogonaux avaient été étudiés par *J. P. M. Binet,* Correspondance sur l'Ec. polyt. 2 (1809/13), p. 71 [1810]; *J. Steiner,* J. reine angew. Math. 2 (1827), p. 292; Werke 1, Berlin 1881, p. 385, 394; *M. Chasles,* J. math. pures appl. (1) 1 (1836), p. 324. Depuis, ils ont été étudiés par *H. Schröter,* J. reine angew. Math. 85 (1878), p. 67, 174; *A. Schoenflies,* Z. Math. Phys. 23 (1878), p. 269; 24 (1879), p. 62; *F. Ruth,* Sitzgsb. Akad. Wien 80 II (1879), p. 257/86; cf. *W. Fiedler,* Die darstellende Geometrie, (3^e éd.) 2, Leipzig 1883, p. 287; *A. Clebsch,* Geom.[105]) 2^1, p. 195.

164) *Pappus,* Συναγωγή μαθηματική (troisième siècle de notre ère); Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt, éd. *F. Hultsch* 2, Berlin 1877, p. 580/1; *J. N. P. Hachette,* Correspondance math. phys. (de *A. Quetelet*) 4 (1828), p. 285; *M. Chasles,* Nouv. Mém. Acad. Bruxelles 6 (1830), p. 44; *Th. Reye,* Die Geometrie der Lage 1, Hanovre 1866; (2^e éd.) 1, Hanovre 1877; (3^e éd.) 1, Leipzig 1886; (4^e éd.) 1, Leipzig 1899, p. 260; *Th. Meyer,* Diss. Strasbourg 1884. Pour plus de détails, cf. *O. Staude,* Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 963.

165) *A. L. Cauchy,* Exercices math. 3, Paris 1828, p. 1; Œuvres (2) 8, Paris 1890, p. 10; *L. O. Hesse* [Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 130] a employé les coordonnées homogènes; voir *K. G. Chr. von Staudt,* Beiträge zur Geometrie der Lage, fasc. 1, Nuremberg 1856, p. 286.

que la plupart des auteurs ont ramené les problèmes qui se posent à l'occasion des surfaces du second ordre; toutefois, il n'est pas indifférent de considérer la droite comme définie soit par deux équations, soit par ses paramètres directeurs, soit par les coordonnées barycentriques d'un point courant; à chaque question correspond généralement une définition analytique de la droite qui lui convient particulièrement.*

1°) On peut considérer la droite comme intersection de deux plans et définir les points communs à une quadrique et à une droite par le système

$$f = 0, \quad u = 0, \quad v = 0,$$

où f est une forme quadratique quaternaire en x_1, x_2, x_3, x_4,

$$f = \sum_{(i,k)} a_{ik} x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

et où

$$u = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4,$$
$$v = v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4,$$

auquel correspond *l'invariant simultané de la surface et de la droite* (u, v) [intersection des deux plans $u = 0$, $v = 0$], obtenu en bordant deux fois avec les u_i et les v_i le déterminant $|a_{ik}|$ de la forme f; on peut représenter symboliquement[166] cet invariant simultané par

$$\tfrac{1}{2}(abuv)^2.$$

2°) *L'emploi des paramètres directeurs [n° **5**] α, β, γ conduit, pour déterminer les vecteurs ϱ ayant pour origine un point fixe x_0, y_0, z_0 de la droite et pour extrémités les points situés sur la droite et sur la surface, à une équation du second degré[167]

$$\varrho^2 \varphi(\alpha, \beta, \gamma) + \varrho(\alpha f'_{x_0} + \beta f'_{y_0} + \gamma f'_{z_0}) + f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

dans laquelle $\varphi(x, y, z)$ représente l'ensemble des termes du second degré de $f(x, y, z)$.*

3°) Les coordonnées barycentriques [n° **4**] et plus généralement les coordonnées binaires [n° **1**] λ, μ des points communs à une droite et à une quadrique, dont l'équation $f(x, y, z, t)$ est homogène, vérifient l'équation[168]

$$\lambda^2 f_{11} + 2\lambda\mu f_{12} + \mu^2 f_{22} = 0,$$

166) *A. Clebsch*, J. reine angew. Math. 59 (1861), p. 1. Le *principe du transfert* (*Übertragungsprinzip*) de *A. Clebsch* [Vorlesungen über Geometrie, publ. par *F. Lindemann*, (1re éd.) 1, Leipzig 1876, p. 274; trad. par *Ad. Benoist* 1, Paris 1879, p. 342] peut être considéré comme résumant la méthode de *A. L. Cauchy*.

167) Cf. *O. Staude*, Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 360; *A. L. Cauchy*, Exercices math. 3, Paris 1828, p. 2, 66; Œuvres (2) 8, Paris 1890, p. 11, 85.

168) *A. L. Cauchy*, Exercices math. 3, Paris 1828, p. 2; Œuvres (2) 8, Paris 1890, p. 11; et, plus loin [Exercices math. 3, p. 66; Œuvres (2) 8, p. 83] sous une forme un peu différente en prenant le rapport $\frac{\mu}{\lambda}$ comme variable; *L. O. Hesse*, Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 131; *A. Clebsch*, Geom.[105]) 2[1], p. 132.

où

$$f_{11} \equiv f(x_1, y_1, z_1, t_1), \quad f_{22} \equiv f(x_2, y_2, z_2, t_2),$$
$$f_{12} \equiv x_1 f'_{x_2} + y_1 f'_{y_2} + z_1 f'_{z_2} + t_1 f'_{t_2} = x_2 f'_{x_1} + y_2 f'_{y_1} + z_2 f'_{z_1} + t_2 f'_{t_1},$$

x_1, y_1, z_1, t_1 et x_2, y_2, z_2, t_2 étant les coordonnées des points qui définissent la droite.

Le déterminant

$$P = f_{11} f_{22} - f_{12}^2$$

est, à un facteur près, égal à[169]

$$|a_{ik}, u_i, v_i|.$$

28. Rapport anharmonique. *Une droite étant définie par deux points, le rapport anharmonique[170] relatif à ces points et aux points de rencontre de la droite avec une quadrique (ces points étant pris dans un ordre convenable) se déduit de l'équation [**27**, 3°]; on en conclut immédiatement les résultats suivants:*

Si sur une droite variable, issue d'un point fixe A, on prend un point B, tel que le rapport anharmonique k de A et B et des points communs à la droite et à une quadrique fixe soit constant, le lieu de B est une quadrique[171]. En particulier:

1°) si k est nul ou infini, c'est la quadrique donnée;

2°) si $k = 1$, c'est le *cône circonscrit* de sommet A;

3°) si $k = -1$, c'est le *plan polaire* de A (plan double).

Toutes ces quadriques sont circonscrites à la première le long de la courbe d'intersection avec le plan polaire de A.

29. Tangentes et plans tangents. *Une droite peut rencontrer une quadrique en un seul point à distance finie, l'autre étant rejeté à l'infini; elle est alors parallèle à une génératrice du cône asymptote ou à un plan directeur.

Elle peut rencontrer la surface en deux points confondus A et est alors *tangente* à la surface en A (A n'étant pas point double); le lieu de ces tangentes est le *plan tangent* en A.

Si A est à l'infini, le plan tangent est appelé *plan asymptote*; il est tangent au cône asymptote ou parallèle à un plan directeur; une parallèle à la direction asymptotique correspondante située dans ce plan asymptote et non située sur la surface ne rencontre la surface qu'à l'infini; c'est une *asymptote*.

Le plan asymptote coupe la surface suivant deux droites à distance

169) Les déterminants doublement bordés, par *S. Gundelfinger* dans *L. O. Hesse*, Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 179; *H. R. Baltzer*, Analyt. Geom.[95]), p. 497.

170) Voir III 17, **27**.

171) *A. Clebsch*, Geom.[105]) 2[1], p. 134. Au sujet de ce rapport anharmonique *C. Stephanos* a donné un théorème intéressant; on peut aussi consulter les travaux de *W. F. Meyer*, Jahresb. deutsch. Math.-Verein. 12 (1903), p. 137

finie ou infinie; il peut lui-même être rejeté à l'infini, si la direction asymptotique correspondante est l'intersection des plans directeurs.

Les plans asymptotes sont les plans diamétraux conjugués des directions asymptotiques; à chaque plan asymptote correspond un diamètre singulier, qui est une asymptote[172]).*

30. Coordonnées tangentielles. On peut considérer l'ensemble des points communs à une droite et à une quadrique comme constituant une surface de seconde classe dégénérée [n° **20**]; si la droite est définie par deux plans de coordonnées u_i et v_i, l'équation tangentielle de l'ensemble des deux points s'obtient en égalant à zéro le déterminant[173]) trois fois bordé

$$|a_{ik}, u_i, v_i, w_i|,$$

dans lequel les w_i sont les coordonnées tangentielles courantes.

D'après le principe de dualité, au problème de la recherche des plans tangents menés par une droite à la quadrique considérée comme surface de seconde classe correspond le problème de la recherche des points d'intersection d'une droite et d'une quadrique considérée comme surface du second ordre.

A l'équation [**27**, 3°] correspond une autre équation de même forme, et au déterminant P correspond un déterminant

$$Q = F_{11} F_{22} - F_{12}^2;$$

Q est à un facteur positif près le produit du déterminant $A = |a_{ik}|$ par P[174]); il en résulte que de la réalité des points d'intersection de la droite et de la surface on pourra déduire, suivant le signe du déterminant A, que les plans tangents menés par la droite sont réels ou ne sont pas réels[175]).

31. Cône circonscrit. *G. Monge* a reconnu que la courbe de contact d'un cône circonscrit est plane[176]). L'équation de ce cône

172) ***L. F. Painvin*, Géom. analyt.[28]) 2, première partie p. 275, 362; *E. Pruvost*, Géom. analyt.[20]) 2, p. 143, 150; *B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]) 3, p. 230.*

173) *S. Gundelfinger* dans *L. O. Hesse*, Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 129, 471.

174) *G. Salmon*, Treatise on the analytical geometry of three dimensions, (1re éd.) Dublin 1862; (4e éd.) Dublin 1882; trad. *O. Chemin*, Traité de géométrie analytique à trois dimensions (1re éd.) 1, Paris 1882, p. 90.

175) Les résultats ont été obtenus synthétiquement par *R. Sturm*, Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, Leipzig 1867, p. 252; *H. Schröter*, Oberflächen zweiter Ordnung[105]), p. 142. Une construction des points d'intersection a été donnée par *H. G. Zeuthen*, Math. Ann. 18 (1881), p. 33/68.

176) *G. Monge* [Leçons de géométrie descriptive, (1re éd.) publiée dans le Journal des séances de l'Ecole Normale, Paris an III; (2e éd.) Paris an VI, p. 52; (3e éd.) Paris 1812; (4e éd.) Paris 1820; (7e éd.) Paris 1847] considère ce théorème comme connu; il le démontre [Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie, Paris

est en coordonnées ponctuelles[177])

$$P = f_{11} f_{22} - f_{12}^2 = 0,$$

dans laquelle les coordonnées de l'un des points [**27**, 3°] sont celles du sommet et les coordonnées de l'autre sont les coordonnées courantes [voir n° **33**].

Ce cône détermine le contour apparent de la surface dans une projection centrale[178]). *Il se réduit à un plan tangent si le sommet est sur la surface, à un cylindre si le sommet est à l'infini, ce cylindre pouvant devenir un plan si la direction de ses génératrices est une direction asymptotique.*

*En coordonnées tangentielles, le cône circonscrit mené à la surface de seconde classe $F = 0$ le long de la section de cette surface et d'un plan donné de coordonnées (u_1', u_2', u_3', u_4') est représenté par l'ensemble des deux équations [cf. n° **20**]

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{i=4} u_i F'_{u_i'} = 0,$$

la dernière représentant le pôle du plan (u_1', u_2', u_3', u_4').*

32. Cônes circonscrits particuliers. Le cône des directions asymptotiques considéré par *L. Euler* [n° **14**] a pris une signification plus précise avec *J. Plücker*[179]), qui a introduit la notion de cône asymptote, dont le sommet est le centre de la surface à laquelle il est circonscrit le long de la conique de l'infini.

G. Lamé[180]) a montré que le lieu des points d'où l'on peut mener trois tangentes rectangulaires à une quadrique (lieu des sommets des cônes équilatères circonscrits [n° **26**]) est une quadrique.

G. Monge[181]) a établi que le lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits (lieu des sommets des cônes circonscrits capables

an III, éd. Paris an IX, n° 5; voir aussi les éditions suivantes de cet ouvrage publiées sous le titre: Application de l'analyse à la géométrie; (5e éd.) revue par *J. Liouville*, Paris 1850, p. 16; *A. L. Cauchy*, Applic. du calcul infin. à la géom.[36]) 1, p. 209; Œuvres (2) 5, Paris 1903, p. 220.

177) *L. O. Hesse*, Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 171; *H. R. Baltzer*, Analyt. Geom.[95]), p. 207, 494; ***B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]) 3, p. 130.*

178) Au sujet de la grandeur apparente d'un ellipsoïde, voir *H. A. Schwarz* [Nachr. Ges. Gött. 1883, p. 39/50; Math. Abh. 2, Berlin 1890, p. 312/9]; pour le paraboloïde hyperbolique voir *G. Pflaumbaum*, Diss. Halle 1888; cf. *J. Lüroth*, Festschrift der Universität zu Freiburg i. B. 1902, p. 179/205.

179) *J. Plücker*, System der Geom. des Raumes[32]), p. 95.

180) *G. Lamé*, Examen[44]), p. 80.

181) D'après *Livet*, Correspondance sur l'Éc. polyt. 1 (1804/8), p. 30 [1804]. Voir aussi *S. D. Poisson*, id. 1 (1804/8), p. 239 [1807]; 3 (1814/6), p. 320 [1816]; *G. Lamé*, Examen[44]), p. 80.

d'un trièdre trirectangle[182]) d'après *J. Plücker*) à un ellipsoïde ou à un hyperboloïde est une sphère; *cette sphère peut être imaginaire pour un hyperboloïde; elle est alors réelle pour l'hyperboloïde conjugué, à moins que ces hyperboloïdes ne soient réciproques équilatères; la sphère se réduit alors au centre de la surface et le seul cône correspondant est le cône asymptote* [n° **26**]. *L. I. Magnus*[183]) et *J. Plücker*[184]) ont montré que ce lieu est un plan dans le cas des paraboloïdes[185]).

Le lieu des sommets des cônes circonscrits à l'ellipsoïde et qui ont une section principale formée de génératrices rectangulaires est, d'après *A. Mannheim*[186]), une surface des ondes de Fresnel[187]).

Sur le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à une quadrique, voir n° **72**.

33. Le complexe des tangentes. Les tangentes à une quadrique forment, d'après *J. Plücker*[188]) un complexe spécial du second ordre, dont l'équation en coordonnées plückériennes, est [**27**, 3°]

$$P = \sum_{(i,k)} a_{ik} p_i p_k = 0. \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Cette équation convient encore si la quadrique est un cône; s'il s'agit d'un système de deux plans, P est un carré parfait[189]) [cf. n° **20**].

A. Voss[190]) a édifié une théorie des quadriques en coordonnées plückériennes, fondée sur cette remarque que les coefficients $a_{i,k}$

182) System der Geom. des Raumes[32]), p. 206.

P. Serret [C. R. Acad. sc. Paris 117 (1893), p. 400, 435, 480] considère la sphère orthoptique comme sphère directrice d'un système des surfaces.

183) *L. I. Magnus*, Aufgaben aus der analyt. Geometrie[27]) 2, p 325.

184) *J. Plücker*, System der Geom. des Raumes[32]), p. 206.

185) *L. F. Painvin* [Bull. sc. math. (1) 2 (1871), p. 371] signale comme connu le fait que le lieu de l'intersection de deux plans rectangulaires tangents à un cône du second ordre est un cône du second ordre.

186) D'après un problème proposé par *J. Steiner* [communication verbale; Werke 2, Berlin 1882, p. 724] et une remarque de *K. Weierstrass* [id. 2, p. 742]. *Voir d'ailleurs déjà *E. Lampe*, Progr. Berlin 1870 (Note de *G. Loria*).* Cf. *A. Mannheim*, C. R. Acad. sc. Paris 90 (1880), p. 971; Proc. R. Soc. London 32 (1881), p. 447/50.

187) Pour tous ces cônes, voir aussi *O. Böklen*, Mathem.-naturwiss. Mitteil. Württemb. (1) 1 (1884/6), éd. Tubingue 1887, p. 48; *A. Koch*, Archiv. Math. Phys (2) 9 (1890), p. 250/85. Une méthode générale permettant de résoudre tous ces problèmes d'une façon uniforme a été donnée par *O. Staude*, Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 940, note 66.

188) *J. Plücker*, Neue Geometrie des Raumes[70]), p. 257.

189) *J. Plücker*, Id. p. 259; *A. Clebsch*, Geom.[105]) 2[1], p. 151.

190) *A. Voss*, Nachr. Ges. Gött. 1875, p. 101; Math. Ann. 10 (1876), p. 143; 13 (1878), p. 320; *F. Klein*, Math. Ann. 2 (1870), p. 198, 366; 4 (1871), p. 356; 5 (1872), p. 257, 278; *F. Aschieri*, Reale Istit. Lombardo *Rendic.* (2) 9 (1876), p. 222; voir *O. Staude*, Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 824.

peuvent être regardés comme coefficients d'une transformation orthogonale, si l'on assujettit les coordonnées à vérifier l'identité

$$\sum_{i=1}^{i=6} p_i^2 = 0.$$

34. Polygones inscrits et circonscrits. *J. V. Poncelet*[191]) a, d'après *Ch. J. Brianchon*, énoncé, relativement à un quadrilatère gauche dont les côtés sont tangents à une quadrique, le théorème suivant: *les quatre points de contact sont dans un même plan.* *T. Weddle*[192]) a montré que cet énoncé était incomplet et l'a rectifié: ou bien le théorème de Poncelet est vérifié ou bien chaque côté du quadrilatère est divisé harmoniquement par son point de contact et par son point de rencontre avec le plan des trois autres points de contact. *A. Voss*[193]) s'est occupé du problème général de la recherche des conditions que doivent remplir n points d'une quadrique pour qu'ils puissent être points de contact des côtés d'un polygone fermé circonscrit.

J. Steiner et *T. Weddle*[194]) ont étudié le tétraèdre dont les six arêtes sont tangentes à une surface du second ordre.

H. G. Zeuthen[195]) s'est occupé du problème relatif à la construction d'un polygone inscrit à une quadrique, et dont les côtés passent par des points donnés (*polygones de Poncelet*)[196]).

Les théorèmes de fermeture[197]), relatifs aux polygones inscrits à une quadrique et circonscrits à une quadrique homofocale à la première, se déduisent du théorème d'addition[198]) des intégrales hyperelliptiques de genre 2.

191) *Ch. J. Brianchon*, Lignes du second ordre[37]), p. 14; *J. V. Poncelet*, Propriétés projectives[41]), (1re éd.) p. 81; (2e éd.) 1, p. 78.

192) *T. Weddle*, Cambr. Dublin math. J. 8 (1853), p. 106; voir *G. Bruno*, Atti Acad. Turino 17 (1881/2), p. 35; *A. Mannheim*, Bull. Soc. math. France 25 (1897), p. 78; **R. Bricard*, Bull. Soc. math. France 25 (1897), p. 180/4.*

193) *A. Voss*, Math. Ann. 25 (1885), p. 39/70; 26 (1886), p. 231/46; *H. G. Zeuthen*, Math. Ann. 26 (1886), p. 247/74.

194) *J. Steiner*, J. reine angew. Math. 2 (1827), p. 192; Werke 1, Berlin 1881, p. 132; Ann. math. pures appl. 19 (1828/9), p. 6; Werke 1, Berlin 1881, p. 186; *T. Weddle*, Cambr. Dublin math. J. 8 (1853), p. 105.

195) *J. V. Poncelet*, Propriétés projectives[41]), (1re éd.) p. 338; (2e éd.) 1, p. 311; Applications d'analyse et de géométrie 1, Paris 1862, p. 145; *H. G. Zeuthen*, Math. Ann. 18 (1881), p. 33; voir *A. Hurwitz*, Math. Ann. 15 (1879), p. 8; *A. Voss*, Math. Ann. 25 (1885), p. 39/70; 26 (1886), p. 231/46; *G. Loria*, I poligoni di Poncelet, Turin 1889; Bibl. math. (2) 3 (1889), p. 67; *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie 1, Leipzig 1892, p. 33; *P. Serret*, Nouv. Ann. math. (2) 4 (1865), p. 145, 193, 433.

196) Voir III 17, **43**.

197) Voir III 17, **46** et **47**.

**G. Darboux*[199]) a, à ce sujet, obtenu d'importants résultats relatifs à ce qu'il appelle des *routes de lumière* et *R. Bricard*[200]) a retrouvé et étendu par des procédés élémentaires l'un de ces résultats.*

**G. Humbert*[201]) a étudié les tétraèdres inscrits à une quadrique et dont les faces sont tangentes à une autre quadrique; *G. Fontené*[202]) a obtenu de nombreux résultats relatifs aux polyèdres inscrits à une quadrique et circonscrits à une autre, ainsi qu'aux propriétés d'assemblages de points et de plans, dont il a fait une étude approfondie.*

35. Normales. *M. Chasles* a étudié les normales à une quadrique à divers points de vue; en particulier, il a montré que le lieu des normales aux différents points d'une génératrice est un paraboloïde hyperbolique[203]) et a recherché les propriétés des normales qui rencontrent une droite[204]) non située sur la surface, ainsi que la distribution de celles que l'on peut mener aux points d'une section plane[205]). Il a reconnu que les six normales issues d'un point appartiennent à un cône du second degré[206]) et a déterminé leurs pieds en cherchant l'intersection de la surface et d'une cubique gauche[207]).

Cette dernière question a été résolue par *F. Joachimsthal*[208]) et

198) Voir *J. Liouville*, J. math. pures et appl. (1) 12 (1847), p. 255; *G. Darboux*, L'Institut (1) 38 (1870), p. 142 (nº 1896); *O. Staude*, Math. Ann. 22 (1883), p. 1 et suiv.; *F. Klein*, Math. Ann. 28 (1887), p. 533; *G. Darboux*, Leçons sur la théorie générale des surfaces 2, Paris 1889, p. 307; **R. Bricard*, Nouv. Ann. math. (4) 8 (1908), p. 317.*

199) *Bull. Soc. philom. Paris (6) fasc. 7 (1870), p. 92; Théorie générale des surfaces[198]) 2, p. 303.*

200) *Nouv. Ann. math. (4) 8 (1908), p. 317.*

201) **G. Humbert*, Bull. Soc. math. France 32 (1904), p. 135.

202) *G. Fontené*, Nouv. Ann. math. (4) 4 (1904), p. 289; Bull. Soc. math. France 32 (1904), p. 284; 33 (1905), p. 115; 34 (1906), p. 3, 153; 35 (1907), p. 9.*

203) *M. Chasles*, J. math. pures appl. (1) 2 (1837), p. 417.

204) *M. Chasles*, Correspondance math. phys. de l'Observatoire de Bruxelles 5 (1839), p. 49; C. R. Acad. sc. Paris 54 (1862), p. 318; cf. *A. Mannheim*, C. R. Acad. sc. Paris 78 (1874), p. 633.

205) *M. Chasles*, J. math. pures et appl. (1) 8 (1843), p. 215; voir *J. Plücker*, J. reine angew. Math. 35 (1847), p. 103; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 459; **E. N. Laguerre*, C. R. Acad. sc. Paris 78 (1874), p. 438; Œuvres 2, Paris 1905, p. 364.*

206) *M. Chasles*, J. math. pures appl. (1) 3 (1838), p. 433; C. R. Acad. sc. Paris 54 (1862), p. 318; Correspondance math. phys. de l'Observatoire de Bruxelles 5 (1839), p. 49; cf. *J. Steiner*, J. reine angew. Math. 49 (1855), p. 346; Werke 2, Berlin 1882, p. 636; **E. Pruvost*, Géom. analyt.[20]) 2, p. 305; *B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]) 3, p. 335.*

207) *Th. Reye*, Geometrie der Lage[164]), (4ᵉ éd.) 2, Stuttgard (Leipzig) 1907, p. 241; trad. par *O. Chemin*, Géométrie de position 2, Paris 1882, p. 195; *O. Staude*, Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]) 1, p. 466; **M. Stuyvaert*, Mathesis (2) 8 (1898), p. 105.*

A. Clebsch[209]) au moyen d'une équation du sixième degré *pour les surfaces à centre; cette équation n'étant plus que du cinquième degré pour les paraboloïdes*. **F. Joachimsthal*[210]) a étudié complètement cette équation dans le cas où la surface est un ellipsoïde et a montré que le nombre des normales réelles dépend de la position du point d'où elles sont menées, par rapport aux deux nappes de la surface lieu des centres de courbure principaux.*

Les recherches de *J. A. Serret*[211]), *A. Mayer*[212]) et *E. Papperitz*[213]) sont relatives à la normale considérée comme mesurant le maximum ou le minimum de la distance d'un point donné à un point variable d'une quadrique.

A. Clebsch[214]) a généralisé la théorie des normales au point de vue projectif[215]).

L. F. Painvin[216]) a montré que le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les arêtes sont normales à un ellipsoïde *est une courbe du seizième ordre, admettant le centre de la surface comme point multiple d'ordre 8 et *O. Böklen* a déduit de l'équation du sixième degré de *F. Joachimsthal* diverses propriétés métriques.*

**A. H. Desboves*[217]) a introduit la notion de *pôle normal* et de *surface normo-polaire,* qui est une surface du quatrième ordre, lieu des pôles des plans passant par trois des pieds des normales issues d'un point; il a également considéré la *synormale,* qu'avait rencontrée *M. Chasles* dans ses recherches; il démontre simplement que les pieds de cinq normales issues d'un point ne sont jamais sur une même sphère. *E. N. Laguerre*[218]) a étudié les propriétés des sphères qui passent par quatre pieds des normales issues d'un point.

208) *F. Joachimsthal*, J. reine angew. Math. 26 (1843), p. 172; 53 (1857), p. 149; 59 (1861), p. 111; 73 (1871), p. 207; *Nouv. Ann. math. (2) 9 (1870), p. 481/9.*

209) *A. Clebsch*, Ann. mat. pura appl. (1) 4 (1861), p. 195; J. reine angew. Math. 62 (1863), p. 64; cf. *F. Caspary*, J. reine angew. Math. 83 (1877), p. 72; *G. Humbert*, C. R. Acad. sc. Paris 111 (1890), p. 963.

211) *J. A. Serret*, Cours de calcul différentiel et intégral, (5ᵉ éd.) 1, Paris 1900, p. 228/31.

212) *A. Mayer*, Ber. Ges. Lpz. 33 (1881), math. p. 28.

213) *E. Papperitz*, Diss. Leipzig 1883.

214) *A. Clebsch*, Ann. mat. pura appl. (1) 4 (1861), p. 195; J. reine angew. Math. 62 (1863), p. 64; cf. *A. Cayley*, Trans. Cambr. philos. Soc. 12 (1871/8), éd. 1879, p. 319/65 [1873]; Papers 8, Cambridge 1895, p. 316/65; *R. Sturm*, Liniengeometrie[195]) 1, p. 374.

215) Voir III 17, **54**.

216) *L. F. Painvin*, Nouv. Ann. math. (2) 10 (1871), p. 337.

217) **A. H. Desboves*, Théorie nouvelle des normales aux surfaces du second ordre, Paris 1862.*

218) **E. N. Laguerre*, Nouv. Ann. math. (2) 17 (1878), p. 168; Œuvres 2, Paris 1905, p. 496.*

Les normales à une quadrique forment une congruence du sixième ordre et de seconde classe; elles appartiennent au complexe des axes [voir n° **61**]. Elles ont été étudiées à ce point de vue par *Th. Reye*[219]) et *R. Sturm*[220]).

36. Généralisation de la notion de puissance et du théorème de Newton. Si deux droites parallèles issues de deux points A et B rencontrent une quadrique respectivement en M, M' et N, N' le rapport

$$\frac{AM \cdot AM'}{BN \cdot BN'}$$

est indépendant de la direction de la sécante. *J. Neuberg*[221]) a introduit à ce sujet la notion d'*indice* d'un point A; *c'est, pour une quadrique à centre, le rapport précédent quand on suppose que le point B est centre de la surface.*

Pour les quadriques à centre

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

l'indice peut aussi être représenté par le premier membre de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=\frac{t^2}{d^2},$$

où (x, y, z) sont les coordonnées du point A, tandis que t et d désignent respectivement la longueur d'une tangente quelconque menée de P à la quadrique et le demi-diamètre de la quadrique qui est parallèle à cette tangente[222]).

*Les théorèmes de *C. Maclaurin* et de *L. N. M. Carnot* relatifs aux courbes planes peuvent être étendus aux quadriques[223]).*

Les génératrices rectilignes.

37. Notion de génératrice rectiligne. Une droite, qui a plus de deux points communs avec une quadrique (29) ou par laquelle

219) *Th. Reye,* Geom. der Lage[164]), (3e éd.) 2, Leipzig 1892, p. 142; 3, Leipzig 1892, p. 44; trad. *O. Chemin* 2, p. 206; J. reine angew. Math. 93 (1882), p. 81.

220) *R. Sturm,* Liniengeometrie[195]) 1, p. 374; *O. Böklen,* J. reine angew. Math. 96 (1884), p. 169.

221) *G. Salmon*, Analyt. geom. of three dimensions[174]); trad. *O. Chemin*, Géom. analyt. à trois dimensions[61]), (1re éd.) Paris 1882, p. 81; *J. Neuberg*, Nouv. Ann. math. (2) 9 (1870), p. 318. Voir *J. Steiner,* J. reine angew. Math. 31 (1846), p. 90; Werke 2, Berlin 1882, p. 357; *G. Loria*, Z. Math. Phys. 30 (1885), p. 291/300.

222) Cf. *O. Staude*, Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 360 [§ 67, formule (4)].

223) **G. Salmon*, Analytic geom. of three dimensions[174]); trad. *O. Chemin*[61]), (1re éd.) 1, p. 81.*

on peut mener à la surface plus de deux plans tangents, est tout entière sur la surface. C'est à *G. Monge*[224]) que l'on doit d'avoir établi l'existence de telles droites, appelées *génératrices rectilignes* de la surface. Elles apparaissent dans les recherches de *Ch. Dupin* comme intersection de la surface et d'un plan tangent[225]), comme tangentes inflexionnelles, comme lignes asymptotiques[226]) et comme tangentes coïncidant avec leurs conjuguées (lignes d'ombre propre)[227]). Elles font aussi partie des lignes géodésiques de la surface.

Les surfaces du second ordre autres que les systèmes de plans possèdent une infinité simple de génératrices rectilignes, qui ne sont réelles que pour les surfaces II (surfaces réglées du second ordre) et V (cônes réels) [cf. n° **19**]. *J. Steiner* a étudié ces surfaces en les considérant comme engendrées par les génératrices rectilignes définies comme intersections de plans homologues de faisceaux homographiques[228]); *K. G. Chr. von Staudt,* à la suite de *J. V. Poncelet* a étendu cette étude synthétique aux surfaces dont les génératrices sont imaginaires[229]).

38. Les deux systèmes de génératrices. Une surface du second degré a deux systèmes de génératrices; chacun est appelé un système réglé de la quadrique. **G. Koenigs*[230]) propose de désigner chaque système sous le nom de *demi-quadrique*; cette distinction est importante au point de vue de l'étude de l'espace réglé; les deux séries forment deux demi-quadriques *complémentaires.**

Chaque *demi-quadrique* peut être représentée en coordonnées linéaires plückériennes indépendamment de sa complémentaire[231]).

224) *G. Monge*, J. Éc. polyt. (1) cah. 1 (an III), p. 5; *G. Monge* et *J. N. P. Hachette*, Applic. de l'algèbre à la géom.[88]), p. 34, 44; *Chr. Wren* [Philos. Trans. London 4 (1669/70), p. 961/2] et *A. Parent* [Essais et recherches de math.[4]), (2e éd.) 2, p. 645/62] les avait signalées pour l'hyperboloïde de révolution; cf. *E. Kötter,* Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 5² (1898), Leipzig 1901, p. 75.

225) *Ch. Dupin,* Géom.[9]), p. 51; voir *A. F. Möbius,* Der baryc. Calcul[12]), § 111; Werke 1, Berlin 1885, p. 139.

226) *Ch. Dupin,* Géom.[9]), p. 51, 189.

227) *Ch. Dupin,* Géom.[9]), p. 52.

228) *J. Steiner*, System. Entw.[85]), p. 182; Werke 1, Berlin 1881, p. 363; *Th. Reye*, Geom. der Lage[164]), (4e éd.) 1, p. 122; trad. *O. Chemin* 2, p. 33/40; *H. Schröter*, Oberflächen zweiter Ordnung[105]), p. 87.

229) *J. V. Poncelet,* Propriétés projectives[41]), (1re éd.) 1, p. 382; (2e éd.) 1, p. 371; *K. G. Chr. von Staudt,* Beiträge zur Geometrie der Lage[58]), fasc. 1, Nuremberg 1856, p. 113; voir *R. Sturm*, Synth. Unters. Flächen dritter Ordnung[175]), p. 248; *L. Cremona*, Preliminari di una teoria geometrica delle superficie, Bologne 1866, p. 26; trad. par *M. Curtze*, Grundzüge der allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung, Berlin 1870, p. 26; *F. August*, Progr. Berlin 1872.

230) **G. Koenigs*, Géom. réglée[73]), p. 50.*

G. Monge et *J. N. P. Hachette*[232]) ont établi que par un point quelconque de la surface passe une génératrice de chaque système, que deux génératrices de systèmes différents se coupent, *tandis que deux génératrices de même système ne sont jamais dans un même plan.*

L'existence des deux systèmes permet de représenter, par les projections des génératrices[233]), les quadriques réglées et d'en construire des modèles en fil[234]). *Les génératrices se projettent sur un plan principal suivant les tangentes à la section principale; une génératrice variable d'un système détermine sur deux génératrices fixes de l'autre système des divisions homographiques, qui sont des divisions semblables dans le cas du paraboloïde[235]).*

Dans l'hyperboloïde à une nappe, chaque génératrice d'un système est comme l'a montré *J. Steiner*[236]) parallèle à une génératrice de l'autre et à une génératrice du cône asymptote[237]); dans le paraboloïde hyperbolique, les génératrices d'un système sont parallèles à un plan directeur qui contient la génératrice à l'infini de l'autre système.

*Trois génératrices d'un système déterminent dans l'hyperboloïde un parallélépipède, appelé *parallélépipède de Binet*; son volume est constant[238]).*

Cette propriété ainsi que la propriété analogue du paraboloïde hyperbolique ont un caractère invariant dans la *géométrie homographique affine*[239]).

231) *O. Staude,* Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 909 [§ 159 formules (12) et (12')].

232) *G. Monge* et *J. N. P. Hachette*, Applic. de l'algèbre à la géom.[88]), p. 35.

233) *G. Monge* et *J. N. P. Hachette*, Applic. de l'algèbre à la géom.[88]), p. 52.

234) *G. Monge*, Géom. descriptive[176]), (4e éd.) p. 130; des modèles en fil ont été construits en 1830 par *Th. Olivier* [cf. *F. Müller*, Jahrb. Fortschr. Math. 1868, éd. Berlin 1871, p. 298 en note]; au sujet des modèles en fil contruits depuis, voir *W. von Dyck*, Katalog[149]), p. 259.

235) **Ch. A. A. Briot* et *J. C. Bouquet*, Géom. analyt.[21]), p. 644, 666; *E. Pruvost*, Géom. analyt.[20]) 2, p. 248; *B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]) 3, p. 347.*

236) *J. Steiner*, J. reine angew. Math. 2 (1827), p. 270; Werke 1, Berlin 1881, p. 150; *K. G. Chr. von Staudt*, Geom. der Lage[46]), p. 214.

237) *E. Bobillier* [Corresp. math. phys. (de *A. Quetelet*) 4 (1828), p. 35] a déterminé le lieu des points par lesquels passent deux génératrices se coupant sous un angle donné. Relativement à un angle droit, voir *J. Plücker* [System der Geom. des Raumes[32]), p. 205] et la généralisation projective de *G. Bauer* [Sitzgsb. Akad. München 11 (1881), p. 242].

238) *J. N. P. Hachette*, J. reine angew. Math. 1 (1826), p. 345; cf. *H. Vogt*, J. reine angew. Math. 86 (1879), p. 297; *A. Schumann*, Z. Math. Phys. 26 (1881), p. 136; **B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]) 3, p. 357.*

239) Cf. *O. Staude*, Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 504/5 [§ 92 formules (24) et (29)].

L'hyperboloïde équilatère (26) est caractérisé[240]) par ce fait qu'à chaque génératrice en correspondent deux autres de l'un ou de l'autre système, formant avec la première un système de trois droites orthogonales deux à deux, de même que le cône équilatère est capable d'une infinité de trièdres trirectangles inscrits [n° **26**]. Dans le paraboloïde équilatère, et seulement dans ce paraboloïde, il existe dans chaque système une génératrice perpendiculaire à toutes celles de l'autre système[241]).

39. Représentation analytique des génératrices rectilignes. *G. Monge* et *J. N. P. Hachette*[242]) ont donné les équations des projections des génératrices rectilignes sur les plans principaux. *A. L. Cauchy*, considérant la surface dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

a donné les équations de ses génératrices rectilignes sous la forme[243])

$$\frac{y}{b}+\varepsilon\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{x}{a}\right),\quad \frac{y}{b}-\varepsilon\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{x}{a}\right),\qquad \varepsilon=\pm 1.$$

D'une façon générale, si l'équation de la surface est, en coordonnées tétraédriques,

$$x_2 x_3 = x_1 x_4,$$

on peut, d'après *J. Plücker*[244]), représenter ses génératrices rectilignes par l'ensemble des équations

$$x_1-\lambda x_2=0,\ x_3-\lambda x_4=0\quad\text{ou}\quad x_1-\lambda x_3=0,\ x_2-\lambda x_4=0.$$

Ces dernières équations peuvent aussi être considérées relativement à un système de coordonnées cartésiennes homogènes, dans lequel $x_4=0$ représente le plan de l'infini et elles représentent alors les génératrices rectilignes du paraboloïde hyperbolique[245]).

240) Les théorèmes dualistiques sont donnés par *J. Plücker,* System der Geom. des Raumes[32]), p. 156, 205.

241) *J. Steiner*, Syst. Entw.[85]), p. 211; Werke 1, p. 380; *L. I. Magnus,* Aufgaben aus der analyt. Geometrie[27]) 2, p. 249.

242) Applic. d'algèbre à la géom.[88]), p. 34, 44.

243) *A. L. Cauchy*, Applic. du calcul infin. à la géom.[86]) 1, p. 228; Œuvres 2 (5), p. 231; *E. Bobillier*, Corresp. math. phys. (de *A. Quetelet*) 4 (1828), p. 30. Discussion détaillée de cette équation dans *O. Staude*, Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]) p. 337.

244) System der Geom. des Raumes[32]), p. 105. Cette représentation revient à prendre pour sommets du tétraèdre de coordonnées les sommets d'un quadrilatère gauche dont les côtés sont sur la surface [cf. *O. Staude*, Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]) p. 908].

245) **Ch. A. A. Briot* et *J. C. Bouquet*, Géom. analyt.[21]), p. 673; *E. Pruvost*,

*Si l'équation de ce paraboloïde hyperbolique est

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2x,$$

les génératrices sont représentées par

$$\frac{y}{b} - \varepsilon\frac{z}{c} = \lambda,\ \lambda\left(\frac{y}{b} + \varepsilon\frac{z}{c}\right) = 2x,\ \text{où}\ \varepsilon = \pm 1.$$

En appliquant aux quadriques la méthode générale de recherche des droites situées sur une surface algébrique, on peut trouver des équations d'une forme analogue aux précédentes[246]).*

La représentation analytique des génératrices rectilignes est, pour les surfaces précédentes, en coordonnées tangentielles[247]), tout à fait analogue à celle qui a été indiquée en coordonnées ponctuelles.

F. Schur[248]) représente les génératrices rectilignes, en coordonnées plückériennes, au moyen de trois paramètres u, v, w, liés par la relation $u^2 + v^2 + w^2 = 0$ et apparaissant sous forme homogène.

40. Directrices d'un système réglé. Si trois génératrices d'un système sont prises comme directrices, l'autre système est engendré par une droite qui est assujettie à rencontrer les trois premières, ainsi que *G. Monge*[249]) l'a établi. *A. F. Möbius*[250]) a démontré cette proposition au moyen du calcul barycentrique. *J. Steiner*[251]) a indiqué d'abord une démonstration analytique, que *L. I. Magnus*[252]) a donnée explicitement, établissant postérieurement le même théorème par voie synthétique[253]). *L. O. Hesse*[254]) en a donné plusieurs démonstrations analytiques, dans lesquelles il utilise les déterminants.

La recherche des points de rencontre d'une droite et d'un hyperboloïde défini par trois directrices a fait l'objet des travaux de *Ch. J. Brianchon, A. Petit, A. J. Cl. B. Duleau*[255]); plus tard *J. Steiner*[256]) et *L. O. Hesse*[257]) ont traité la même question.

*Au point de vue de la géométrie descriptive, *A. J. Cl. B. Duleau* a traité le problème pour l'hyperboloïde de révolution, *E. Rouché*[258]) a donné à ce sujet deux autres constructions; *Rémoy*[259]) a étendu l'une d'elles à un hyperboloïde quelconque et au paraboloïde hyperbolique.*

41. Système de quatre droites. De la solution du problème précédent résulte celle du problème, posé par *J. D. Gergonne*[260]) et résolu par divers auteurs[261]), relatif à la recherche d'une droite qui en rencontre quatre autres. Il y a, en général, deux solutions du problème; il y en a une infinité simple si les quatre droites données sont génératrices d'un même système d'un hyperboloïde[262]) *ou d'un paraboloïde hyperbolique.*

J. Steiner[263]) a le premier montré que les quatre hauteurs d'un

---

Géom. analyt.[20]) 2, p. 259; *B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]) 3, p. 358;* *O. Staude*, Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[90]), p. 347 (§ 65 formule (9)).

246) *Ch. A. A. Briot* et *J. C. Bouquet*, Géom. analyt.[21]), p. 658; *E. Pruvost*, Géom. analyt.[20]) 2, p. 272; *B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]) 3, p. 364.*

247) **L. F. Painvin*, Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 121; *G. Papelier*, Coord. tangent.[69]) 2, p. 179.*

248) Math. Ann. 21 (1883), p. 518.

249) Géom. descriptive[176]), (2e éd.) p. 130; *G. Monge* et *J. N. P. Hachette*, Applic. de l'algèbre à la géom.[88]), p. 33; voir *J. N. P. Hachette*, J. reine angew. Math. 1 (1826), p. 342; *J. P. M. Binet*, id. p. 340.

250) Der baryc. Calcul[12]), p. 13; Werke 1, p. 140.

251) J. reine angew. Math. 2 (1827), p. 271; Werke 1, Berlin 1881, p. 150.

252) Aufgaben aus der analyt. Geometrie[27]) 2, p. 277.

253) *J. Steiner*, Syst. Entw.[85]), p. 195; Werke 1, p. 371.

254) Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 113.

255) Voir *J. N. P. Hachette*, Correspondance sur l'Éc. polyt. 1 (1804/8), p. 434 [1808].

256) J. reine angew. Math. 2 (1827), p. 274; Werke 1, Berlin 1881, p. 153.

257) J. reine angew. Math. 26 (1843), p. 148; Werke, Munich 1897, p. 75.

258) *Nouv. Ann. math. (3) 1 (1882), p. 97.*

259) **J. Caron*, Cours de géométrie descriptive, Paris 1888, p. 259, 261, 263, 355, 358.*

260) Ann. math. pures appl. 17 (1826/7), p. 83.

261) *Ch. J. Brianchon* et *A. Petit*, Correspondance sur l'Ec. polyt. 1 (1804/8), p. 434 [1808]; *J. Steiner*, J. reine angew. Math. 2 (1827), p. 268; Werke 1, Berlin 1881, p. 147; System. Entw.[85]), p. 243; Werke 1, p. 402; *E. Bobillier* et *H. Garbinsky*, Ann. math. pures appl. 18 (1827/8), p. 182/4; *H. Garbinsky*, J. reine angew. Math. 5 (1830), p. 174/81; **G. Loria*, Vorlesungen über darstellende Geometrie, Leipzig 1907, p. 46/8;* dans un cas particulier, *A. F. Möbius*, Der baryc. Calcul[12]), p. 356; Werke 1, p. 310. Des solutions analytiques ont été données par *J. A. Grunert*, Archiv Math. Phys. (1) 1 (1841), p. 136; *Anonyme*, Cambr. Dublin math. Journal 3 (1843), p. 232/3.

262) *Les auteurs allemands expriment en général que quatre droites font partie d'un système de génératrices d'un hyperboloïde en disant qu'elles sont en *situation hyperboloïdique* (hyperboloidische Lage);* voir par ex. *H. Schröter*, Oberflächen zweiter Ordnung[105]), p. 95. Sur les conditions analytiques que doivent vérifier les quatre droites, voir *Anonyme*, Nouv. Ann. math. (3) 5 (1886), p. 158; *G. Salmon*, Analyt. geom. of three dimensions[174]); trad. *O. Chemin*, Géom. analyt.[61]), (2e éd.) 1, p. 174; voir *H. R. Baltzer*, Analyt. Geom.[95]), p. 520; *O. Hermes*, J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 218; *K. Döhlemann*, Archiv Math. Phys. (2) 17 (1900), p. 160.

263) J. reine angew. Math. 2 (1827), p. 96; Werke 1, Berlin 1881, p. 128; System. Entw.[85]), p. 316; Werke 1, p. 454; *O. G. D. Aubert* [J. reine angew. Math. 5 (1830), p. 169; cf. *O. Hermes*, id. 56 (1859), p. 241] en donne une démonstration. Voir aussi *F. Joachimsthal*, Archiv Math. Phys. (1) 32 (1859),

tétraèdre font partie d'un même système de génératrices d'un hyperboloïde. *A. F. Möbius*[264]) et *E. Bobillier*[265]), dans des cas particuliers, et *M. Chasles*[266]), dans le cas général, ont montré que les droites qui joignent les sommets homologues de deux tétraèdres réciproques par rapport à une quadrique sont génératrices d'un même système d'un hyperboloïde; *il en est de même des intersections des faces homologues de ces tétraèdres.* D'autres exemples sont fournis par la collinéation involutive, où deux droites correspondantes quelconques et les axes de la collinéation[267]) appartiennent à un système de génératrices d'un hyperboloïde; il en est de même de deux couples quelconques de droites conjuguées, lignes d'action de deux vecteurs auxquels on peut réduire un système donné de vecteurs[268]).

42. Complexes auxquels appartiennent les génératrices rectilignes. La géométrie réglée de *J. Plücker*[269]) conduit à une extension du théorème de *G. Monge* [n° **40**]: les droites communes à trois complexes linéaires

$$P_1 = 0,\ P_2 = 0,\ P_3 = 0$$

appartiennent en même temps à tous les complexes du système linéaire à trois termes

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0,$$

et constituent un système de génératrices rectilignes d'une quadrique réglée, l'autre système étant formé par l'ensemble des directrices de toutes les congruences du système linéaire.

D'après *F. Klein*[270]), les complexes linéaires, qui sont en involution[271]) avec chaque complexe du système linéaire à trois termes, constituent un nouveau système linéaire à trois termes, et les axes des complexes spéciaux des deux systèmes linéaires constituent les deux systèmes de génératrices mentionnés précédemment[272]). *J. Plücker*[273]) a donné, en coordonnées ponctuelles, l'équation de la quadrique définie par trois complexes et *P. Gordan*[274]) a retrouvé cette équation par une autre voie; *F. Klein*[275]) a obtenu l'équation de cette surface en coordonnées plückériennes, *modifiées de façon à faire disparaître toute intervention de géométrie ponctuelle ou de géométrie planaire[276]).* *P. Gordan*[277]) s'est occupé de la recherche des complexes auxquels appartiennent les génératrices d'une quadrique et *H. Vogt*[278]) a traité la même question dans le cas où la quadrique est un hyperboloïde équilatère. Les deux systèmes de génératrices rectilignes d'une quadrique ne peuvent appartenir à un même complexe linéaire et, d'après *F. Schur*[279]), ils ne peuvent appartenir en même temps qu'à un seul complexe du second ordre.

43. Ponctuelles projectives sur les génératrices. Une génératrice variable d'un système détermine sur deux génératrices fixes de l'autre système deux ponctuelles projectives (semblables dans le cas du paraboloïde)[280]) et détermine avec les génératrices fixes deux faisceaux homographiques de plans; ces deux propriétés sont le fondement

---

p. 109. Cf. *O. Staude* [Analyt. Geom. der Ebene[8]), p. 341], où se trouve une démonstration très courte des deux propositions dualistiques.

264) Der baryc. Calcul[12]), p. 399; Werke 1, p. 345.

265) Ann. math. pures appl. 18 (1827/8), p. 321.

266) Ann. math. pures appl. 19 (1828/9), p. 65; Aperçu hist.[41]), (2e éd.) p. 402. Des développements plus étendus se trouvent dans *L. O. Hesse*, ms. posth. écrit en 1844 ou 1845; Werke, Munich 1897, p. 642; *O. Hermes*, J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 234; *P. Serret*, Géom. de direction[14]), p. 181; *P. Muth*, Z. Math. Phys. 38 (1893), p. 314; 39 (1894), p. 116; *F. Bützberger*, id. 38 (1893), p. 1; *J. Valyi*, Monatsh. Math. Phys. 6 (1895), p. 220.

267) *K. G. Chr. von Staudt*, Beiträge zur Geometrie der Lage, fasc. 1, Nuremberg 1856, p. 63.

268) *A. F. Möbius*, J. reine angew. Math. 10 (1833), p. 336; Werke 1, Leipzig 1885, p. 510.

269) Proc. R. Soc. London 14 (1865), p. 56; J. math. pures appl. (2) 11 (1866), p. 337; Philos. Trans. London 155 (1865), p. 750; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 466, 505; Neue Geom. des Raumes[70]), p. 113.

270) Math. Ann. 2 (1870), p. 208.

271) *Pour l'étude des systèmes de complexes linéaires, de l'involution de deux complexes, des complexes spéciaux consulter *G. Koenigs*, Géom. réglée[73]).*

272) Une démonstration très courte des deux dernières propositions est donnée par *O. Staude*, Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 910 (§ 159, nos 7, 8 et 9).

273) Neue Geom. des Raumes[70]), p. 118.

274) Z. Math. Phys. 13 (1868), p. 59; *A. Cayley*, Trans. Cambr. philos. Soc. 11 (1863/9), p. 290; Papers 7, Cambridge 1894, p. 66; Math. Ann. 4 (1871), p. 558; Papers 8, Cambridge 1895, p. 401; *M. Pasch*, J. reine angew. Math. 75 (1873), p. 131; *F. Caspary*, Bull. sc. math. (2) 13 (1889), p. 223; *W. Fiedler*, dans sa trad. de *G. Salmon*, Analyt. Geom. des Raumes, (4e éd.) 1, Leipzig 1898, p. 142.

275) Math. Ann. 2 (1870), p. 209; cf. *M. Pasch*, J. reine angew. Math. 75 (1873), p. 106; *F. Klein*, Höhere Geometrie[104]) 1, p. 178.

276) **G. Koenigs*, Géom. réglée[73]), p. 10.*

277) Z. Math. Phys. 13 (1868), p. 59.

278) J. reine angew. Math. 86 (1879), p. 297.

279) Math. Ann. 21 (1883), p. 515; voir aussi *A. Voss*, Math. Ann. 8 (1875), p. 54; 10 (1876), p. 143. Dans ce dernier mémoire est indiquée (p. 160, 175) la notion de *l'involution* d'un complexe linéaire avec une surface du second ordre.

280) *A. F. Möbius*, Der baryc. Calcul[12]), p 235; Werke 1, p. 214.

de l'étude de *J. Steiner*[281]) sur les quadriques. *K. G. Chr. von Staudt* considère un système de génératrices comme une *forme élémentaire du second ordre*[282]) et établit des relations de projectivité et d'involution entre les rayons des deux systèmes.

44. Polygones construits sur des génératrices. Les sommets d'un quadrilatère gauche dont les côtés sont génératrices rectilignes d'une quadrique sont aussi les sommets d'un tétraèdre circonscrit dont les faces sont tangentes à la surface. *L. I. Magnus* et *J. Plücker* ont mis en évidence la relation de ce tétraèdre avec la surface en donnant à cette dernière l'équation particulière[283])

$$a_{23}x_2x_3 + a_{14}x_1x_4 = 0.$$

Relativement à l'hexagone construit sur des génératrices, il existe des propriétés analogues à celles qui résultent des théorèmes de Pascal et de Brianchon sur les coniques; elles ont été signalées par *L. O. Hesse*[284]).

45. Ligne de striction d'une quadrique. *M. Chasles*[285]) a montré que la ligne de striction d'un hyperboloïde à une nappe est une courbe gauche du huitième ordre. D'après *A. Migotti*[286]), elle se décompose[287]) en deux courbes unicursales du quatrième ordre[288]), chacune d'elles correspondant à un système de génératrices.

---

281) Syst. Entw.[85]), p. 194; Werke 1, p. 370.

282) Rapport anharmonique de quatre éléments d'une série réglée par *M. Chasles*, Correspondance math. phys. Observ. Bruxelles 5 (1839), p. 50; *K. G. Chr. von Staudt*, Beiträge zur Geom. der Lage, fasc. 1, Nuremberg 1856, p. 5, 49, 55, 63.

283) Le quadrilatère gauche formé par des génératrices fut étudié par *J. N. P. Hachette*, J. reine angew. Math. 1 (1826), p. 345; *L. I. Magnus*, Aufgaben aus der analyt. Geometrie[27]) 2, p. 292; *J. Plücker*, J. reine angew. Math. 24 (1842), p. 283; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 396; *H. Schröter*, Oberflächen zweiter Ordnung[105]), p. 144; *F. Klein*, Höhere Geom.[104]) 1, p. 29.

284) Après *G. P. Dandelin*, Ann. math. pures appl. 15 (1824/5), p. 387; *L. O. Hesse*, J. reine angew. Math. 24 (1842), p. 40; Werke, Munich 1897, p. 58; *J. Plücker*, System der Geom. des Raumes[32]), p. 129; Neue Geometrie des Raumes[70]), p. 120; *L. O. Hesse*, J. reine angew. Math. 85 (1878), p. 304; Werke, Munich 1897, p. 651, 676. Cf. *O. Hermes*, J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 204; *F. R. Gräfe*, id. 93 (1882), p. 87; *F. London*, Math. Ann. 38 (1891), p. 334/68; *O. Staude*, Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]) p. 913; *A. Cayley* [Cambr. math. J. 4 (1843/5), p. 18; Papers 1, Cambridge 1889, p. 43; Quart. J. pure appl. math. 9 (1868), p. 185; Papers 6, Cambridge 1893, p. 101] a démontré le théorème de Pascal pour le cône du second ordre.

285) Correspondance math. phys. Observ. Bruxelles 5 (1839), p. 49.

286) Sitzgsb. Akad. Wien 80 II (1879), p. 1023.

287) Voir aussi *Th. Schmidt*, Sitzgsb. Akad. Wien 84 (1881), p. 908; *A. Adler*, Sitzgsb. Akad. Wien 85 II (1882), p. 369. La ligne de striction du paraboloïde

Sections planes.

46. Représentation analytique. *L. Euler*[289]) a déterminé le degré d'une section plane en effectuant une transformation de coordonnées, un plan de coordonnées du nouveau système étant le plan de la section. *A. L. Cauchy*[290]) employa la même méthode et l'utilisa pour étudier la nature de la section. Elle servit également à *L. O. Hesse*[291]) qui adopta le système des coordonnées homogènes.

En coordonnées ponctuelles de l'espace, une section plane est représentée par l'ensemble des deux équations

$$f = \sum_{(i,k)} a_{ik}x_ix_k = 0, \quad \text{où} \quad a_{ik} = a_{ki}, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$
$$u = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0;$$

le déterminant obtenu en bordant le discriminant de la surface par u_1, u_2, u_3, u_4 est l'invariant simultané[292]) de f et de u, que l'on peut représenter par

$$|a_{ik}, u_i|.$$

En coordonnées trilatères y_1, y_2, y_3 relatives à un triangle de référence de sommets $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ du plan sécant, la section est représentée par une équation

$$\sum_{(i,k)} f_{ik}y_iy_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

$$f_{ik} = \sum_{(\alpha,\beta)} a_{\alpha\beta}x_\alpha^{(i)}x_\beta^{(k)} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4);$$

le déterminant $|f_{ik}|$ est égal à un facteur près au déterminant $|a_{ik}, u_i|$[293]). *L. O. Hesse*[294]) donna, en outre, une représentation analytique de la section

---

hyperbolique se compose de deux paraboles [*G. Salmon*, Analyt. geom. of three dimensions[174]); trad. *O. Chemin*, Traité de géom. analyt. à trois dimensions, (1re éd.) 2, Paris 1891, p. 258].

288) Cf. aussi *K. Rohn* et *E. Papperitz*, Darstellende Geometrie 2, Leipzig 1896, p. 233.

289) Introd.[7]) 2, p. 370; trad. *J. B. Labey* 2, p. 375.

290) Applic. du calcul infin. à la géom.[36]) 1, p. 263; Œuvres (2) 5, p. 273/80.

291) Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 388.

292) *L. O. Hesse*, J. reine angew. Math. 49 (1855), p. 255; Werke, Munich 1897, p. 330; cf. *J. Versluys*, Archiv Math. Phys. (1) 50 (1869), p. 157, 210; (1) 51 (1870), p. 49.

293) *A. Clebsch*, Geom.[105]) 2[1], p. 138; *H. M. Taylor*, Proc. math. Soc. London (1) 11 (1879/80), p. 141/3. Cf. *O. Staude*, Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 795.

294) Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 179. On trouvera exposée en détail

en coordonnées tangentielles v_1, v_2, v_3, v_4 (la section étant considérée comme surface singulière de seconde classe); son équation s'obtient en annulant le discriminant de f bordé deux fois avec u_1, u_2, u_3, u_4 et avec v_1, v_2, v_3, v_4:

$$|a_{ik}, u_i, v_i| = 0.$$

La figure dualistique d'une section plane est un réseau de plans formé de plans tangents à un cône circonscrit à la quadrique (sur le cône circonscrit considéré comme lieu de droites voir n° **31**).

47. Classification des sections au point de vue projectif. Une première question se pose dans l'étude des sections planes, c'est de rechercher si les sections sont:

I) des coniques propres;
II) des systèmes de deux droites;
III) des droites doubles;
IV) si le plan sécant appartient tout entier à la surface.

Ch. Dupin[295]) a remarqué qu'un plan tangent coupe la surface suivant deux droites; *ces droites sont concourantes si le plan a son point de contact à distance finie; parallèles, si la surface est une surface propre à centre et si le plan est asymptote; une droite à distance finie et une droite à l'infini, si la surface est un paraboloïde et si le plan est directeur; une droite double, si la surface est un cône ou un cylindre[296]).* *J. Plücker*[297]) a généralisé la remarque de *Ch. Dupin* en montrant que la section d'une surface par un plan tangent admet le point de contact comme point double. Procédant par voie synthétique, *J. Steiner*[298]) est parvenu à ce résultat relativement à l'hyperboloïde à une nappe et a établi le théorème dualistique. D'après *L. O. Hesse*[299]), la condition pour qu'un plan coupe une quadrique

la représentation de toutes les sections planes à l'aide de coordonnées planaires dans *O. Staude*, Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 831.

295) Géom.[9]), p. 51; voir *A. L. Cauchy*, Applic. du calcul infin. à la géom.[36]) 1, p. 220; Œuvres (2) 5, p. 231, 237.

296) Au sujet de ces cas particuliers voir *O. Staude*, Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 620/2.

297) J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 359; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 118.

298) System. Entw.[85]), p. 195; Werke 1, p. 371; cf. *F. Seydewitz*, Archiv Math. Phys. (1) 9 (1847), p. 195. Sur les plans tangents imaginaires, voir *K. G. Chr. von Staudt*, Beiträge zur Geom. der Lage, fasc. 1, Nuremberg 1856, p. 112.

299) Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 179.

suivant un système de droites distinctes[300]) est [cf. n^{os} **20** et **46**]

$$|a_{i,k}, u_i| = 0.$$

Cette condition convient aux surfaces propres du second ordre; dans le cas où la quadrique est un cône ou un cylindre, un plan passant par le sommet (à distance finie ou infinie) coupe la surface suivant deux droites; une seconde condition est nécessaire pour que le plan soit tangent: il coupe alors la surface suivant deux droites confondues.

48. Classification au point de vue métrique. Suivant que la section plane est rencontrée par le plan de l'infini en deux points imaginaires, en deux points réels ou en deux points confondus, elle est:

I) *elliptique* (ellipse réelle ou imaginaire, système de droites concourantes imaginaires),

II) *hyperbolique* (hyperbole ou droites concourantes réelles),

III) *parabolique* (parabole, droites parallèles réelles ou imaginaires, droite double)[301]).

Il peut aussi arriver que l'une des droites soit à l'infini ou que la section se réduise à une droite double rejetée à l'infini.

En vue de déterminer la nature de la section *A. L. Cauchy*[302]) en cherchait le centre et étudiait les axes de cette section [n° **50**]. *L. O. Hesse*[303]) a également traité de cette classification d'une façon approfondie.

L'étude du problème inverse, la recherche d'un plan coupant une quadrique suivant une conique donnée, a été entreprise d'abord par *G. P. Dandelin*[304]). *Il a étudié en particulier les sections planes du

300) **B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]) 3, p. 187.* *O. Staude* [Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 809] énumère toutes ces conditions.

301) *A. L. Cauchy*, Applic. du calcul infin. à la géom.[36]) 1, p. 271; Œuvres (2) 5, p. 276; *J. Steiner*, J. reine angew. Math. 2 (1827), p. 271; Werke 1, Berlin 1881, p. 150; System. Entw.[85]), p. 196; Werke 1, p. 371.

302) Applic. du calcul infin. à la géom.[36]) 1, p. 265; Œuvres (2) 5, p. 273. Si à chaque plan on adjoint le centre de la section faite par ce plan, on obtient, d'après *R. Sturm* [Liniengeometrie[195]) 1, p. 78] un système focal d'ordre supérieur (*höherer Nullsystem*) *dans lequel la correspondance entre point et plan n'est pas univoque.*

303) Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 388; voir p. 469 le tableau complet et les critères de *S. Gundelfinger;* ils sont complétés dans *O. Staude*, Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 617.

304) Nouv. Mém. Acad. Bruxelles 3 (1826), p. 8; *Chr. Wiener*, Z. Math. Phys. 20 (1875), p. 317; *F. Ruth*, Sitzgsb. Akad. Wien 95 II (1887), p. 240; *M. Krewer*, Archiv Math. Phys. (2) 12 (1894), p. 185/222; *W. Ludwig*, Diss. Breslau 1898; *G. Diem*, Diss. Munich 1898; *W. Ludwig*, Archiv Math. Phys. (3) 12 (1907), p. 219/30, 305/16.

cône et du cylindre de révolution; les résultats auxquels il est parvenu ont été étendus en partie aux quadriques propres.*

49. Relations entre plusieurs sections planes. *L. Euler*[305]) a le premier établi d'une facon incomplète, puis *G. Monge* et *J. N. P. Hachette* ont montré rigoureusement, que des sections planes parallèles d'une quadrique sont de même nature au sens du n° **48** et qu'elles sont *homothétiques*[306]).

L. I. Magnus[307]) a remarqué que deux sections planes quelconques d'un cylindre sont *affines* et que deux sections planes quelconques d'un cône sont *perspectives* (ou *en situation perspective*) l'une de l'autre. *M. Chasles*[308]) a établi le théorème général relatif à la possibilité de considérer deux sections planes d'une quadrique comme étant en situation perspective de deux manières. On lui doit également divers théorèmes sur les positions des six centres perspectifs relatifs à trois sections planes considérées deux à deux.

Ces propriétés peuvent être établies par la géométrie et sont utilisées en géométrie descriptive pour la recherche des intersections de surfaces du second ordre[309]).

50. Les axes d'une section plane. La première solution du problème relatif à la recherche des axes de la section plane d'une quadrique est due à *A. L. Cauchy*[310]) qui, à l'aide d'une transformation de coordonnées rectangulaires, obtint une équation du second degré dont dépendent ces axes. Cette solution reçut diverses modifications de *L. O. Hesse*[311]) et de *O. Henrici*[312]). Une autre solution consiste à rechercher

305) Introd.[7]) 2, p. 338; trad. *J. B. Labey* 2, p. 342; *G. Monge* et *J. N. P. Hachette*, Applic. de l'algèbre à la géom.[86]), p. 29; voir *H. R. Baltzer*, Analyt. Geom.[95]), p. 490.

306) Voir l'article III 17, **35**.

307) Aufgaben aus der analyt. Geometrie[27]) 2, p. 156, 174; voir *H. R. Baltzer*, J. reine angew. Math. 54 (1857), p. 162; Analyt. Geom.[95]), p. 445. *Deux courbes sont *affines* (ou *alliées*), si elles se correspondent point par point et droite par droite, de façon que le rapport des aires correspondantes soit constant [voir *Th. Reye*, Geom. der Lage[164]), (1re éd.) 2, Hanovre 1868; (2e éd.) 2, Hanovre 1880; (3e éd.) 2, Leipzig 1892; (4e éd.) 2, Stuttgard (Leipzig) 1907, p. 64; trad. par *O. Chemin*, Leçons sur la géométrie de position 2, Paris 1882, p. 54].*

308) Correspondance sur l'Éc. polyt. 3 (1814/6), p. 14 [1814]; 3 (1814/6), p. 326 [1816]; cf. *J. Steiner*, J. reine angew. Math. 1 (1826), p. 45; Werke 1, Berlin 1881, p. 9.

309) **Ch. Brisse*, Géométrie descriptive 2, Paris 1891, p. 198.*

310) Applic. du calcul infin. à la géom.[36]) 1, p. 266; Œuvres (2) 5, p. 276.

311) Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 395.

312) J. reine angew. Math. 64 (1865), p. 187.

le couple de points qui sont à la fois conjugués harmoniques par rapport aux points à l'infini de la courbe et aux points cycliques du plan de cette courbe; *le problème n'est alors à ce point de vue qu'un cas particulier du problème relatif à la recherche des directions conjuguées communes à deux coniques.*

Dans tous les cas, on parvient à une équation du second degré qui fut donnée par *A. L. Cauchy*[313]) et que l'on peut écrire sous la forme suivante:

$$E(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & u \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$a_{11},\dots$ étant les coefficients de l'équation ponctuelle de la surface et u, v, w ceux de l'équation du plan, dans laquelle le terme constant est 1, les axes de coordonnées étant d'ailleurs supposés rectangulaires.

La réalité des racines de cette équation peut être établie par voie indirecte[314]) ou en utilisant le développement du discriminant en somme de carrés[315]).

51. Sections circulaires et ombilics. Les sections circulaires d'une quadrique, que *R. Descartes* et *J. d'Alembert*[316]) ont signalées

313) Applic. du calcul infin. à la géom.[36]) 1, p. 269; Œuvres (2) 5, p. 279; cf. *L. O. Hesse*, Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 398; **B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]) 3, p. 451; une autre méthode indiquée par *E. Borel* [cf. *B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]) 3, p. 455] présente cet intérêt de ne supposer connue aucune propriété des quadriques; *G. Koenigs* [Leçons d'agrégation classique, Paris 1892, p. 30] a déduit du cas général le cas où la section est parabolique; *G. Papelier* [Coord. tangent.[69]) 2, p. 259] a traité le problème en coordonnées tangentielles.*

314) *L. O. Hesse*, Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 339; voir en particulier le théorème général de *S. Gundelfinger* dans *L. O. Hesse*, Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 515.

315) *L. O. Hesse*, J. reine angew. Math. 60 (1862), p. 305; Werke, Munich 1897, p. 497; Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 406; *O. Henrici*, J. reine angew. Math. 64 (1865), p. 187; *C. Souillart*, id. 65 (1866), p. 320; 87 (1879), p. 220; *G. Bauer*, id. 71 (1870), p. 46; *C. F. Geiser*, Ann. mat. pura appl. (2) 8 (1877), p. 113; *E. Sourander*, J. reine angew. Math. 85 (1878), p. 339. La question de la décomposition en carrés du discriminant s'est posée par le paradoxe de *Ch. Dupin* relatif à l'égalité des deux rayons de courbure principaux [voir n° **54**]; *Ch. Dupin*, Géom.[9]), p. 129; *B. Amiot*, J. math. pures et appl. (1) 12 (1847), p. 130. *O. Staude* [Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 590/1] représente le discriminant par une somme de carrés de telle façon que l'on voit immédiatement que tous les mineurs du premier ordre de ce discriminant s'annulent dans le cas d'une racine double en λ.

316) Voir *E. Kötter*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 5[2] (1896), Leipzig 1901, p. 72.

dans des cas particuliers, furent découvertes dans le cas général par *G. Monge* et *J. N. P. Hachette*[317]), *qui ont reconnu l'existence et la relation avec les axes de la quadrique de six séries de sections circulaires, que l'on peut grouper par couples; un seul de ces couples est formé de sections réelles. *J. N. P. Hachette*[318]) a montré que deux cercles appartenant à une même série ne sont jamais sur une même sphère, que deux cercles de séries différentes mais d'un même couple sont toujours sur une même sphère.* Dans le paraboloïde hyperbolique, il convient, aussi bien au point de vue analytique qu'au point de vue géométrique, de considérer comme plan de section circulaire tout plan qui coupe la surface suivant une droite à distance finie et une droite à l'infini[319]).

Les ombilics de la quadrique, déterminés par *G. Monge*, ont été étudiés par *Ch. Dupin*[320]). On appelle *ombilics* d'une quadrique les points de contact des plans tangents parallèles aux plans des sections circulaires; en ces points l'indicatrice est un cercle.

Les méthodes employées pour la recherche des plans cycliques, ou sont particulières à cet objet[321]), ou reposent sur la décomposition en carrés du discriminant de l'équation [n° **50**]

$$E(\lambda) = 0,$$

ou font intervenir le cône isotrope[322]). *P. Serret*[323]) a montré que toute

317) Applic. de l'algèbre à la géom.[88]), p. 38; cf. *D. F. Gregory*, Cambr. math. J. 1 (1837/9), p. 100.

318) Correspondance sur l'Éc. polyt. 1 (1804/8), p. 430.

**Cl. Servais* a étudié ces sphères bitangentes à la quadrique [Bull. Acad. Belgique (3) 26 (1893), p. 91/102]. Cf. *R. Townsend*, Cambr. Dublin math. J. 3 (1848), p. 1, 97, 148 (Note de *M. Stuyvaert*).*

319) *J. N. P. Hachette*, Correspondance sur l'Éc. polyt. 1 (1804/8), p. 433; *J. Steiner*, J. reine angew. Math. 1 (1826), p. 50; Werke 1, Berlin 1881, p. 14.

320) *G. Monge*, J. Éc. polyt. (1) cah. 2 (an IV), p. 155, 160 [an III]; Applic. de l'analyse à la géom.[176]), p. 127; *Ch. Dupin*, Géom.[9]), p. 181, 277; **Cl. Servais*, Bull. Acad. Belgique (3) 17 (1889), p. 366/84.*

321) *G. Monge* et *J. N. P. Hachette*, Applic. de l'algèbre à la géom.[86]), p. 38; *Ch. Dupin*, Géom.[9]), p. 159; *J. Plücker*, J. reine angew. Math. 19 (1839), p. 8; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 346; cf. *L. O. Hesse* [J. reine angew. Math. 41 (1851), p. 264/8; Werke, Munich 1897, p. 247/52] où est exposé le principe de la résolution de l'équation du sixième degré à laquelle on est conduit; **Ch. A. A. Briot* et *J. C. Bouquet*, Géom. analyt.[21]), p. 625, 641, 662, 706; *E. Pruvost*, Géom. analyt.[20]) 2, p. 275; *B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]) 3, p. 375; **Cl. Servais*, Bull. Acad. Belgique (3) 22 (1891), p. 115/20;* pour la détermination des plans cycliques en coordonnées tangentielles, voir *L. F. Painvin*, Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 56; *G. Papelier*, Coord. tangent.[69]) 2, p. 263.*

322) *J. V. Poncelet*, Propriétés projectives[41]), (1re éd.) p. 397; *K. G. Chr. von*

surface admettant deux séries de génératrices circulaires parallèles est une quadrique;* ce théorème n'est d'ailleurs qu'un cas particulier du théorème plus général où l'on suppose seulement que les génératrices situées dans des plans parallèles sont des coniques semblables.

*L'hyperboloïde orthogonal [n° **26**] est engendré par deux faisceaux de plans rapportés l'un à l'autre de façon que deux plans homologues soient perpendiculaires. Si s et S sont les axes de ces deux faisceaux, les plans des sections circulaires réelles de la surface sont respectivement perpendiculaires à s et S. Si s et S se rencontrent, on a le cône orthogonal. Réciproquement si le plan d'une section circulaire réelle est perpendiculaire à une génératrice rectiligne de la quadrique, celle-ci est un hyperboloïde orthogonal ou un cône orthogonal[324]).*

L'existence des deux séries de sections circulaires, qui permet de considérer les quadriques comme des surfaces doublement cerclées, donne le moyen de construire des modèles en carton de ces surfaces; en particulier on peut limiter ces modèles par des lignes droites. *A. Brill* les a réalisés en 1874 sur les indications de *O. Henrici*[325]).

52. Sections hyperboliques équilatères. Les sections, qui sont des hyperboles équilatères[326]), ont été maintes fois étudiées[327]); elles ont une importance particulière quand la quadrique est un hyperboloïde (à une ou à deux nappes) équilatère; dans ce cas un plan quelconque perpendiculaire à une génératrice du cône asymptote coupe la surface suivant une hyperbole équilatère; il en est de même si la quadrique est un cône équilatère et en particulier, un tel plan mené par le sommet détermine deux génératrices rectangulaires du cône[328]).

Staudt, Beiträge zur Geom. der Lage, fasc. 1, Nuremberg 1856, p. 129; voir aussi *Lyme Ryew*, Giorn. mat. (1) 11 (1873), p. 111; *O. Staude*, Archiv Math. Phys. (3) 7 (1904), p. 183; cf. *O. Staude*, Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 632.

323) J. math. pures appl. (2) 6 (1861), p. 9; **L. F. Painvin*, Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 41.*

324) *J. N. P. Hachette*, Correspondance sur l'Éc. polyt. 1 (1804/8), p. 179 [1806]; *J. Steiner*, Syst. Entw.[85]), p. 232; Werke 1, p. 394 *(Texte de *M. Stuyvaert*).*

325) *W. von Dyck*, Katalog[149]), p. 258.

326) Voir III 17, **21**.

327) *J. W. Tesch*, Nieuw Archief voor Wiskunde (1) 1 (1875), p. 194; *O. Rupp*, Sitzgsb. Akad. Wien 86 (1882) II, p. 909; *J. Gillet*, Mathesis (2) 2 (1892), p. 153, 180, 223; *G. D. E. Weyer*, Archiv Math. Phys. (2) 14 (1896), p. 139 [1895]; *E. R. E. Hoppe*, id. (2) 14 (1896), p. 436; *K. Schober*, Monatsh. Math. Phys. 7 (1896), p. 111; *W. Rulf*, id. 7 (1896), p. 93; voir aussi *J. Steiner*, J. reine angew. Math. 1 (1826), p. 49; Werke 1, Berlin 1881, p. 13.

328) Cf. note 161 et n° **38**.

Les sections planes ayant un rapport d'axes donné sont déterminées par un cône directeur de quatrième classe[329]).

53. Foyers des sections planes. La détermination des foyers d'une section plane[330]) résulte de celle des axes, si la conique est une ellipse ou une hyperbole; de celle de l'axe et du paramètre, si la section est parabolique.

On peut aussi considérer un foyer comme sommet d'un cône circonscrit à la quadrique et admettant comme plan cyclique le plan de la section.

A. Quetelet[331]) a donné le nom de *focale* au lieu des foyers des sections d'un cône par les plans d'un faisceau. *L. F. Painvin*[332]) a montré que le lieu des foyers des sections diamétrales d'une quadrique à centre est une surface du huitième ordre. A cet ordre de recherches se rattache aussi le théorème de *G. P. Dandelin*[333]).

54. Rayons de courbure principaux d'une quadrique. Dupin a ramené le problème relatif à la recherche des rayons de courbure principaux en un point d'une surface du second ordre au problème de la détermination des axes d'une section diamétrale[334]). A cette question se rattache également la théorie de la *surface des ondes* de *A. J. Fresnel*[335]).

329) *O. Staude,* Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 976.

330) **L. F. Painvin,* Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 54; *B. Niewenglowski,* Géom. analyt.[21]) 3, p. 457.*

331) De quibusdam locis geometricis nec non de curva focali, Gand 1819; voir *M. Chasles,* Aperçu hist.[41]), (2e éd.) p. 285; *G. Huber*, Diss. Berne 1893; *F. Stähli,* Diss. Berne 1894; Mitt. Naturf.-Ges. Bern 1895, p. 102/49.

332) Nouv. Ann. math. (2) 3 (1864), p. 481; cf. *Ph. E. Brassinne*, J. math. pures appl. (1) 7 (1842), p. 120. D'autres recherches sur les foyers des sections planes sont dues à *L. Sallet,* Nouv. Ann. math. (2) 9 (1870), p. 463; *C. Pelz,* Sitzgsb. Akad. Wien 82 II (1880), p. 1207; *P. Drouet*, Nouv. Ann. math. (3) 6 (1887), p. 321; *P. Dittmar*, Diss. Giessen 1888; *H. B. Newson*, Annals of math. (1) 5 (1889/90), p. 1; Amer. J. math. 14 (1892), p. 87/94 [1891].

333) Voir III 17, **23**.

334) *Ch. Dupin*, Géom.[9]), p. 29, 151, 205, 223; voir *M. Chasles*, Aperçu hist.[41]), (2e éd.), p. 179, 670; C. R. Acad. sc. Paris 26 (1848), p. 531; *K. G. Chr. von Staudt,* Beiträge zur Geom. der Lage, fasc. 3, Nuremberg 1860, p. 393; *C. Souillart,* J. reine angew. Math. 65 (1866), p. 321; *E. N. Laguerre,* J. math. pures appl. (3) 4 (1878), p. 247; *A. Mannheim,* J. math. pures appl. (3) 8 (1882), p. 167; (5) 2 (1896), p. 51; *C. Cranz*, Z. Math. Phys. 31 (1886), p. 56.

335) Mém. Acad. sc. Institut France (2) 7 (1827), p. 45, 176; Œuvres 2, Paris 1868, p. 293, 328; *A. M. Ampère*, Ann. chimie et phys. (2) 39 (1828), p. 113; *W. R. Hamilton*, Trans. R. Soc. Dublin 17 (1837) part I, p. 128/44; *J. Plücker*, J. reine angew. Math. 19 (1839), p. 91; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 339; *A. Cayley*, J. math. pures appl. (1) 11 (1846), p. 291; Papers 1, Cambridge 1889, p. 302; Quart. J. pure appl. math. 3 (1860), p. 16, 142; Papers 4, Cambridge 1891, p. 420, 432; *A. Mannheim*, Assoc. franc. avanc. sc. 6 (Le Hâvre) 1877, p. 125, 167, 175; *W. Roberts* [Ann. mat. pura appl. (1) 4 (1861), p. 143] et *A. Cayley* [Messenger math. (2) 8 (1878/9), p. 190; Papers 11, Cambridge 1896, p. 71] ont représenté la surface des ondes en coordonnées elliptiques; *H. Weber* [J. reine angew. Math. 84 (1878), p. 354] l'a représentée à l'aide des fonctions elliptiques. Cf. IV 5, **19**.

55. Sections planes tangentes. Le *problème d'Apollonius* peut être généralisé et étendu aux courbes tracées sur une quadrique; il consiste dans la détermination des huit sections planes, qui touchent trois sections planes données d'une quadrique. Il fut d'abord, dans toute sa généralité, l'objet de travaux de *Ch. Dupin*[336]), *M. Chasles*[337]) et *J. B. Durrande*[338]). Le cas particulier où la quadrique est une sphère fut examiné par *L. N. M. Carnot*[339]), *Th. Olivier*[340]) et *J. Steiner*[341]); *G. Frobenius*[342]) généralisa la question en se proposant de rechercher les sections planes qui en coupent trois autres sous *un angle donné.*

Au problème d'Apollonius généralisé se rattache un théorème généralisant dans l'espace à trois dimensions les propriétés du cercle de Feuerbach dans le plan; *F. Mertens*[343]) s'est occupé de cette extension.

Le problème de *G. F. Malfatti* relatif aux sections planes d'une quadrique a été l'objet des travaux de *Ch. Dupin*[344]) et *J. Steiner*[345]) qui se sont placés au point de vue synthétique[346]), de *A. Cayley*[347]) qui l'a traité analytiquement, et de *A. Clebsch*[348]) qui s'est servi des fonctions elliptiques.

336) Correspondance sur l'Éc. polyt. 2 (1809/13), p. 420.

337) Id. 3 (1814/6), p. 16.

338) Ann. math. pures appl. 7 (1816/7), p. 27; voir aussi *F. Mertens*, Z. Math. Phys. 25 (1880), p. 156.

339) Géométrie de position, Paris an XI (1803), p. 415.

340) Correspondance sur l'Éc. polyt. 3 (1814/6), p. 10.

341) J. reine angew. Math. 1 (1826), p. 182; Werke 1, Berlin 1881, p. 38.

342) J. reine angew. Math. 79 (1875), p. 204. Cf. *G. Darboux*, Ann. Éc. Norm. (2) 1 (1872), p. 323; *Th. Reye*, Synthetische Geometrie der Kugeln, Leipzig 1879, p. 56; *F. Schumacher*, Z. Math. Phys. 34 (1889), p. 257.

343) Z. Math. Phys. 25 (1880), p. 156.

344) Correspondance sur l'Éc. polyt 2 (1809/13), p. 421.

345) J. reine angew. Math. 1 (1826), p. 183; Werke 1, Berlin 1881, p. 39.

346) Voir aussi *J. Plücker*, J. reine angew. Math. 11 (1834), p. 356; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 288; *F. Mertens*, Z. Math. Phys. 25 (1880), p. 156; dans le cas de la sphère, *K. H. Schellbach*, J. reine angew. Math. 45 (1853), p. 186/7. Sur les séries de sections planes qui touchent deux sections données, voir *J. Steiner*, J. reine angew. Math. 1 (1826), p. 182; Werke 1, Berlin 1881, p. 44.

347) Philos. Trans. London 142 (1852), p. 253; Papers 2, Cambridge 1889, p. 57.

348) J. reine angew. Math. 53 (1857), p. 292.

Pôles et plans polaires.

56. Réciprocité polaire. La théorie des polaires réciproques relative aux quadriques est contenue en germe dans un théorème de *G. Monge*[349]), qui établit que la courbe de contact d'un cône circonscrit à une quadrique propre est plane et que son plan pivote autour d'une droite fixe, si le sommet du cône décrit une droite. *J. D. Gergonne*[350]) déduisit de cette remarque la notion de réciprocité polaire, introduisant les notions de *pôle* et *plan polaire*; *il montra comment d'une figure donnée par points on peut déduire une figure définie par un ensemble de plans et indiqua comment des propriétés descriptives de la première on peut conclure les propriétés corrélatives de la seconde; ce fut l'origine du principe général de dualité.* La théorie des figures polaires réciproques reçut de nombreux développements dûs à *D. Encontre*[351]), *J. de Stainville*[352]), *F. J. Servois*[353]), *Livet*[354]), *Ch. J. Brianchon*[355]), *M. Chasles*[356]) et *G. Lamé*[357]).

J. V. Poncelet[358]) montra que les notions de centre, de plans diamétraux, de diamètres conjugués, ainsi que quelques autres notions métriques peuvent être rattachées à la théorie des pôles et plans polaires *en faisant intervenir les éléments à l'infini, qu'il avait introduits[359]) en géométrie;* le premier, il considéra le plan polaire comme lieu du conjugué harmonique du pôle par rapport à la surface du second ordre. Il fit également ressortir les rapports de la transformation par polaires réciproques avec l'homologie, en montrant qu'une quadrique est sa propre homologique* si on prend pour centre un point quelconque et pour plan d'homologie le plan polaire du centre par rapport à la quadrique[360]).*

K. G. Chr. von Staudt[361]) considérait la corrélation en elle-même et en déduisait la notion de surface du second ordre envisagée comme surface directrice (Ordnungsfläche).

A. F. Möbius, J. Steiner et surtout *J. Plücker* ont montré que la réciprocité polaire n'est qu'un cas particulier de la corrélation de l'espace, dans laquelle les points et les plans se correspondent d'une manière univoque; une telle correspondance entre figures dualistiques peut être obtenue de façon que cinq points, dont quatre ne sont pas dans un même plan, aient pour corrélatifs cinq plans, dont quatre ne sont pas concourants;* *L. I. Magnus* et *M. Chasles* ont plus tard développé ce point de vue[362]).

*Ce système général de correspondance comprend comme second cas particulier celui où un point quelconque est situé dans le plan corrélatif; c'est ce que les auteurs allemands appellent le *système nul* (*Nullsystem*). Dans le cas général, le lieu du point situé dans le plan corrélatif est une quadrique et le plan corrélatif d'un tel point est tangent à une seconde quadrique [n° **65**].

Le „système nul" peut être considéré au point de vue de la théorie des complexes linéaires; il a été étudié par *G. Giorgini* et *M. Chasles*; ce dernier le désignait sous le nom de *système focal.**

Dans la corrélation générale on distingue deux espaces E et E' coïncidant tous deux avec notre espace ordinaire en sorte que chaque point de ce dernier peut être envisagé comme faisant partie de E ou de E'; dans le premier cas nous le désignerons par P, dans le second par P'. De même chaque plan de l'espace ordinaire peut être en-

349) *G. Monge* [Géom. descriptive[176]), (2e éd.) p. 52] considère ce théorème comme connu; il est démontré dans *G. Monge*, Feuilles d'analyse[176]), n° 5; Applic. de l'analyse à la géom., (5e éd.) p. 14; voir *A. L. Cauchy*, Applic. du calcul infin. à la géom.[36]), p. 209; Œuvres (2) 5, p. 220.

350) Ann. math. pures appl. 1 (1810/1), p. 337; 3 (1812/3), p. 293; 17 (1826/7), p. 273.

351) Id. 1 (1810/1), p. 122.

352) Id. 1 (1810/1), p. 190.

353) Id. 1 (1810/1), p. 337.

354) Correspondance sur l'Éc. polyt. 1 (1804/8), p. 75 [1805].

355) J. Éc. polyt. (1) cah. 13 (1806), p. 297. *G. Monge*, Correspondance sur l'Éc. polyt. 2 (1809/13), p. 322 [1812].

356) Correspondance sur l'Éc. polyt. 3 (1814/6), p. 13 [1816].

357) Examen[44]), p. 48.

358) Propriétés projectives[41]), (2e éd.) 1, p. 380, 396; J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 19.

359) Voir déjà *G. Desargues*, Brouillon proiect d'une atteinte aux evenemens des rencontres d'un cone avec un plan, Paris 1639; Œuvres, éd. *N. G. Poudra* 1, Paris 1864, p. 105, 106.

360) *J. V. Poncelet*, Propriétés projectives[41]), (2e éd.) 1, p. 379.

361) Geom. der Lage[46]), p. 197 et, après lui, *Th. Reye*, Geom. der Lage[307]), (4e éd.) 2, p. 110; trad. *O. Chemin* 2, p. 2; *H. Schröter*, Oberflächen zweiter Ordnung[105]), p. 126; **G. Koenigs*, Géom. réglée[78]), p. 19.*

362) *A. F. Möbius*, Der baryc. Calcul[12]), p. 181/368; Werke 1, p. 169/318; *J. Plücker*, J. reine angew. Math. 5 (1830), p. 25; J. reine angew. Math. 6 (1830), p. 107; J. reine angew. Math. 9 (1832), p. 124; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 149, 178, 224; Analytisch-geometrische Entwicklungen 2, Essen 1831, p. V, 259; System der analytischen Geometrie, Berlin 1835, p. 76; *J. Steiner*, System. Entw.[85]), p. 97; Werke 1, p. 305; *L. I. Magnus*, Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 2, p. 127, où se trouvent les conditions analytiques pour que la réciprocité générale devienne une réciprocité polaire; *M. Chasles*, Aperçu hist.[41]), (2e éd.) p. 219, 370, 633; voir *J. Steiner*, Syst. Entw.[85]), p. VII; Werke 1, p. 234; *F. Klein*, Göttingische gelehrte Anzeigen 1872 I, p. 6; **E. Duporcq*, Premiers principes de géométrie moderne, Paris 1899, p. 41.*

visagé comme un plan Π de E et aussi comme un plan Π' de E'. Les équations

$$(1)\qquad \varrho u'_m = \sum_{n=1}^{n=4} a_{mn} x_n \qquad (m = 1, 2, 3, 4),$$

où le déterminant

$$A = |a_{mn}| \qquad (m, n = 1, 2, 3, 4)$$

est supposé différent de zéro, et où ϱ désigne un facteur de proportionalité, et les équations

$$(2)\qquad \frac{A}{\varrho} x_n = \sum_{m=1}^{m=4} A_{mn} u'_m \qquad (n = 1, 2, 3, 4)$$

que l'on en déduit en les résolvant par rapport à x_1, x_2, x_3, x_4, fournissent une correspondance réciproque entre chaque point P de coordonnées tétraédriques x_1, x_2, x_3, x_4 de l'espace E et le plan Π' de coordonnées u_1', u_2', u_3', u_4' de l'espace E'. D'autre part à chaque plan Π (de l'espace E) déterminé par trois points P_1, P_2, P_3, et ayant pour coordonnées tétraédriques u_1, u_2, u_3, u_4, correspond un point P' (de l'espace E') ayant pour coordonnées tétraédriques x_1', x_2', x_3', x_4' et situé à l'intersection des trois plans Π_1', Π_2', Π_3', où Π_i' correspond à P_i; cette correspondance est donnée par les formules

$$(3)\qquad \frac{A}{\sigma} x'_m = \sum_{n=1}^{n=4} A_{mn} u_n \qquad (m = 1, 2, 3, 4),$$

$$(4)\qquad \sigma u_n = \sum_{m=1}^{m=4} a_{mn} x'_m \qquad (n = 1, 2, 3, 4),$$

où σ est un facteur de proportionnalité.

En général, à deux points confondus

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad P'(x_1', x_2', x_3', x_4')$$

ne correspondent pas deux plans confondus

$$\Pi(u_1, u_2, u_3, u_4), \quad \Pi'(u_1', u_2', u_3', u_4'),$$

comme on le voit sur les équations (1) et (4). Et à deux plans confondus Π et Π' ne correspondent pas deux points confondus P et P', comme on le voit sur les équations (2) et (3).

Pour qu'à deux points confondus *quelconques* P et P' correspondent deux plans confondus Π et Π', il faut et il suffit que les 16 coefficients de l'équation (1) soient proportionnels aux 16 coefficients de l'équation (4), en d'autres termes il faut et il suffit que l'on ait, en

désignant par τ un facteur de proportionnalité, les 16 relations

$$a_{mn} = \tau a_{nm} \qquad (m, n = 1, 2, 3, 4).$$

Ceci n'est possible que pour $\tau = +1$ et pour $\tau = -1$. Dans le premier cas on a

$$a_{mn} = a_{nm} \quad \text{d'où} \quad A_{mn} = A_{nm},$$

dans le second cas on a

$$a_{mn} = -a_{nm} \quad \text{d'où} \quad A_{mn} = -A_{nm}.$$

La *correspondance générale* comprend donc deux cas singuliers où la distinction entre les deux espaces E et E' est superflue; lorsqu'on est dans un des deux cas singuliers on dit qu'il y a *polarité* ou *corrélation involutive*.

Dans le premier de ces deux cas, où $a_{mn} = a_{nm}$, le déterminant A est *symétrique*; c'est le cas du *système polaire* des quadriques. Dans le second cas, où $a_{mn} = -a_{nm}$, en particulier $a_{mm} = 0$, le déterminant A est *gauche*; c'est le cas[363]) du *système focal* ou du *système polaire des courbes gauches du troisième ordre* qui lui correspond ou *du complexe* du premier ordre qui lui est attaché. Dans ce dernier cas un point quelconque est situé dans le plan corrélatif.

La réciprocité polaire n'établit la correspondance univoque entre point et plan que si la surface directrice est une quadrique propre; aussi est-il utile de distinguer différents cas dans son étude, suivant le rang [n° **16**] de la quadrique directrice; on est ainsi amené à considérer trois systèmes de réciprocité polaire: le système *propre*, le système *singulier* et le système du *couple de plans.*

57. Système propre. Relativement à une quadrique propre de second ordre et de seconde classe, le *pôle* et le *plan polaire* se correspondent d'une façon univoque. Deux points x_i et x_k sont dits *conjugués* ou *pôles harmoniques,* si chacun d'eux est dans le plan polaire de l'autre *(il suffit que l'un deux soit dans le plan polaire de l'autre),* ce qui se traduit analytiquement par la relation[364])

$$\sum_{(i,k)} a_{ik} x_i x_k = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

*A toute droite D correspond une droite Δ lieu des pôles des plans passant par D; par Δ passent tous les plans polaires des points de D; D est d'ailleurs le lieu des pôles des plans passant *par Δ et tous les plans polaires des points de Δ passent par D; une droite

363) *O. Staude*, Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 428.

364) Cette relation se trouve en substance dans *G. Monge*, Applic. de l'analyse à la géom.[176]), (5e éd.) p. 14.

quelconque rencontrant D et Δ est divisée harmoniquement par ces droites et par la quadrique.* Les droites D et Δ sont dites *polaires réciproques*[365]); *les auteurs français les désignent sous le nom de droites *conjuguées* par rapport à la quadrique;* si l'on désigne par p_k les coordonnées pluckériennes ponctuelles et par q_i' les coordonnées pluckériennes tangentielles des droites D et Δ, ces quantités sont liées par les relations

$$\varrho q_i' = \sum_{k=1}^{k=6} \alpha_{ik} p_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6),$$

ϱ étant un coefficient de proportionnalité.

K. G. Chr. von Staudt désigne sous le nom de *droites conjuguées*[366]) deux droites telles que chacune rencontre la polaire réciproque de l'autre; *de telles droites n'ont pas reçu de noms particuliers dans les ouvrages français;* leurs coordonnées pluckériennes sont liées par la relation

$$\sum_{(i,k)} \alpha_{ik} p_i p_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Le pôle et le plan polaire sont *incidents* (pôle situé sur le plan polaire), si le premier est point de contact du second, qui est alors tangent à la surface. Si deux droites D et Δ se coupent, elles constituent un couple de tangentes conjuguées relatif à leur point commun situé sur la surface; si elles sont confondues, elles sont génératrice rectiligne de la quadrique.

Le système polaire relatif à la sphère de rayon 1 et dont le centre est à l'origine des coordonnées fournit une interprétation géométrique de la relation entre deux surfaces qui ont la même équation, l'une en coordonnées tangentielles, l'autre en coordonnées ponctuelles[367]) rectangulaires.

*La réciprocité polaire permet de transformer des relations angulaires, grâce à la propriété indiquée par *E. N. Laguerre* qui conduit à définir un angle au moyen d'un rapport anharmonique; dans le cas

365) *J. V. Poncelet,* J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 20. Sur les droites qui s'appuient sur deux droites polaires réciproques, voir *F. Klein*[362]) et *A. Cayley,* Quart. J. pure appl. math. 15 (1878), p. 124; Papers 10, Cambridge 1896, p. 269; *J. Rosanes,* Math. Ann. 23 (1884), p. 416; *A. Cayley,* Messenger math. (2) 19 (1889/90), p. 174; Papers 13, Cambridge 1897, p. 51.

366) Sur l'expression «konjugierte Elemente» voir *K. G. Chr. von Staudt,* Geom. der Lage[46]), p. 191; *G. Fontené,* L'hyperespace, Paris 1892, p. 36.

367) **B. Niewenglowski,* Geom. analyt.[21]), p. 294; *G. Papelier,* Coord. tangent.[69]) 2, p. 103.*

particulier où la quadrique directrice est une sphère, on peut également transformer certaines propriétés purement métriques[368]).*

La réciprocité polaire propre fait correspondre à une surface non développable de degré m une surface algébrique de classe m, à une surface développable une courbe gauche, et à un cône une courbe plane[369]).

Un grand nombre d'auteurs, notamment en France, ont adopté un mode d'exposition un peu différent de celui qui a été indiqué plus haut. Deux points sont dits conjugués par rapport à une quadrique s'ils sont conjugués harmoniques par rapport aux points d'intersection de la surface avec la droite qui les joint. Le plan polaire d'un point est le lieu des conjugués harmoniques de ce point. Transformant ces notions dualistiquement, deux plans sont dits conjugués par rapport à une quadrique s'ils sont conjugués par rapport aux plans tangents menés à la quadrique par leur droite d'intersection; le pôle d'un plan est l'enveloppe des plans qui lui sont conjugués[370]).

*Il est intéressant au point de vue de la corrélation polaire, et même, comme l'indique *G. Fontené*[368]), au point de vue de la corrélation générale de l'espace, de distinguer deux notions dans la correspondance des divers éléments.*

*Deux éléments géométriques peuvent être en relation harmonique par rapport à une quadrique: un point et son plan polaire, deux points tels que la droite qui les joint soit divisée harmoniquement par la quadrique, deux plans formant un faisceau harmonique avec deux plans tangents; deux droites, dont les points sont respectivement en relation harmonique avec la quadrique. Nous dirons que l'un de ces éléments est *polaire réciproque* ou *conjugué harmonique* de l'autre.*

*Deux éléments peuvent être tels que l'un d'eux soit *uni* ou *incident* au polaire de l'autre (un point et un plan sont unis si le point est dans le plan; deux droites sont unies si elles déterminent un point et un plan ou si elles coïncident; deux points ou deux plans sont unis

368) **E. N. Laguerre,* Nouv. Ann. math. (1) 12 (1853), p. 60; Œuvres 2, Paris 1905, p. 9; *E. Pruvost,* Géom. analyt.[20]) 2, p. 377; *E. Duporcq,* Géom. moderne[361]), p. 22, 117; *G. Fontené,* L'hyperespace[366]), p. 36.* Voir encore *O. Staude,* Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 449; **A. Demoulin,* C. R. Acad. sc. Paris 114 (1892), p. 1102/4; *Cl. Servais,* Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8° 58 (1898/9), mém. n° 2, p. 25.*

369) **E. Pruvost,* Géom. analyt.[20]) 2, p. 377; *B. Niewenglowski,* Géom. analyt.[21]) 3, p. 290; *G. Papelier,* Coord. tangent.[69]) 2, p. 107.* Voir encore *O. Staude,* Analyt. Geom. der Ebene[8]), p. 397/407.

370) **E. Duporcq,* Géom. moderne[361]), p. 80, 81; *G. Papelier,* Coord. tangent.[69]) 2, p. 187.*

s'ils coïncident) nous dirons alors que ces éléments sont *conjugues.* Des points et des plans conjugués sont *polaires réciproques;* mais, deux droites conjuguées ne sont pas en général polaires réciproques, tandis que deux droites polaires réciproques sont conjuguées.*

Ainsi, dans un tétraèdre autopolaire, les sommets, les faces sont à la fois conjugués et polaires réciproques, deux arêtes sont conjuguées, mais deux arêtes opposées seules sont polaires réciproques.

58. Système polaire singulier. Relativement au cône du second degré, tout point de l'espace autre que le sommet a un plan polaire qui passe par le sommet; un plan *ne peut avoir de pôle que s'il passe par le sommet du cône;* il en a alors une infinité (multiplicité simple), situés sur une droite issue du sommet.

Un tel système établit une correspondance univoque entre droite et plan issus d'un point fixe (*droite polaire* et *plan polaire*); il lui correspond dualistiquement un *système polaire plan*; les auteurs allemands lui ont donné le nom de *gerbe polaire* (*Polarbündel*).

M. Chasles[371]) l'a étudié synthétiquement et indépendamment de la réciprocité polaire générale; *L. I. Magnus*[372]) en a fait l'étude analytique, en le considérant comme cas particulier de la corrélation réciproque générale (réciprocité conique).

Le système relatif au cône isotrope [**10**, p. 16] a été désigné par *L. I. Magnus*[373]) et *K. G. Chr. von Staudt*[374]) sous le nom de *système orthogonal* (orthogonales Polarbündel); il détermine sur le plan de l'infini un système polaire plan relatif à l'ombilicale.

La réciprocité polaire définie par un couple de plans établit une correspondance involutive entre faisceaux de plans[375]); *elle fait correspondre, à un point non situé sur la droite D commune aux plans du couple, un plan passant par D; à un plan passant par D correspond une infinité de points situés dans un même plan (multiplicité double).*

La réciprocité polaire propre détermine[376]) relativement à un point une gerbe polaire, *en faisant correspondre à toute droite issue du point un plan qui passe par le point et la conjuguée de la droite; le cône directeur est alors le cône circonscrit à la quadrique.* Elle détermine sur un plan P une réciprocité polaire plane *en faisant correspondre à un point du plan la trace du plan polaire de ce point par rapport à la quadrique; cette trace est la polaire du point par rapport à la section de la quadrique par le plan P.* Elle détermine relativement à une droite une correspondance involutive entre points de cette droite ou entre plans passant par cette droite; *à un point de la droite correspond le point où cette droite rencontre le plan polaire du premier et à un plan passant par la droite correspond le plan déterminé par le pôle du premier et par la droite; on peut aussi établir cette correspondance simplement par points conjugués ou par plans conjugués.*

371) Sur les propriétés générales des cônes du second degré, Nouv. Mém. Acad. Bruxelles 6 (1830), mém. n° 11 (n° 10 d'après la Table), p. 33.

372) Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 2, p. 145; *K. G. Chr. von Staudt,* Geom. der Lage[46]), p. 211; Von den Halbmessern[123]), p. 36.

373) Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 2, p. 149.

374) Geom. der Lage[46]), p. 210.

375) Sur le système polaire relatif à un couple de plans, voir *Th. Reye,* Geom. der Lage[307]), (3e éd.) 2, p. 137; trad. *O. Chemin* 2, p. 71.

376) *K. G. Chr. von Staudt,* Geom. der Lage[46]), p. 191.

59. Tétraèdre autopolaire. *J. V. Poncelet*[377]) fut conduit à la notion de tétraèdre *autopolaire* *ou *conjugué* par rapport à une quadrique (tétraèdre dont chaque sommet est le pôle de la face opposée),* en cherchant les cônes qui font partie d'un faisceau ponctuel. *J. Plücker*[378]) a déterminé la multiplicité (d'ordre six) des tétraèdres autopolaires par rapport à une quadrique propre, considérée isolément; il a mis en évidence le fait que leur détermination est un problème identique à celui de la tranformation en une somme de quatre carrés du premier membre de l'équation ponctuelle ou de l'équation tangentielle de la surface. Le premier membre de l'équation en coordonnées pluckériennes relatives à un tétraèdre autopolaire ne contient que les carrés des six coordonnées.

Dans le cône[379]), le tétraèdre autopolaire est remplacé par un *trièdre polaire,* *dont chaque arête est le lieu des pôles du plan des deux autres;* dans les surfaces singulières de seconde classe, il est remplacé par un *triangle autopolaire.* Un trièdre autopolaire du cône isotrope est trirectangle et un triangle autopolaire de l'ombilicale définit trois directions rectangulaires deux à deux.

*Une quadrique Q circonscrite à un tétraèdre conjugué par rapport à une quadrique Q' est dite *harmoniquement circonscrite* à Q';* relativement à de telles quadriques, *L. O. Hesse* a établi les deux propositions suivantes:

377) Propriétés projectives[41]), (1e éd.) p. 395.

378) J. reine angew. Math. 24 (1842), p. 285; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 399; System der Geom. des Raumes[32]), p. 88; voir *C. G. J. Jacobi,* J. reine angew. Math. 53 (1857), p. 265; Werke 3, Berlin 1884, p. 583; *S. Gundelfinger,* dans *L. O. Hesse,* Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 449; **G. Papelier,* Coord. tangent.[69]) 2, p. 198.*

379) *J. Plücker,* System der Geom. des Raumes[32]), p. 93, 97; voir les théorèmes sur les séries de trièdres autopolaires dans *K. G. Chr. von Staudt,* Von den Halbmessern[123]), p. 36.

I. Si une quadrique Q passe par les sommets d'un tétraèdre conjugué par rapport à une quadrique Q', tout point de Q est sommet d'un tétraèdre conjugué par rapport à Q' et inscrit à Q[380]).

II. Par les huit sommets de deux tétraèdres autopolaires par rapport à une quadratique Q, il passe une double infinité de quadriques; toute quadrique qui passe par sept de ces sommets passe par le huitième[381]).

A ces deux théorèmes en correspondent deux autres que l'on déduit des deux premiers par dualité[382]).

Un cas particulier du second théorème fournit cette intéressante proposition[383]):

Si deux tétraèdres autopolaires par rapport à une quadrique ont un sommet commun, les six arêtes issues de ce sommet sont sur un cône du second ordre,

d'où l'on déduit le théorème suivant dû à *A. Göpel*[384]):

Deux systèmes de trois diamètres conjugués d'une quadrique appartiennent à un même cône du second ordre

et celui-ci dû à *J. Steiner*[385]):

Deux systèmes de trois rayons deux à deux orthogonaux appartiennent à un cône équilatère du second ordre [n° **26**].

---

380) *L. O. Hesse,* J. reine angew. Math. 45 (1853), p. 90; Werke, Munich 1897, p. 305; **E. Duporcq,* Géom. moderne[361]), p. 101.* Sur les sphères harmoniquement circonscrites à une quadrique, voir *K. G. Chr. von Staudt* [Von den Halbmessern[125]), p. 56], *H. Faure* [Nouv. Ann. math. 1 (19) (1860), p. 234, 294, 347] qui a montré que ces sphères forment un complexe linéaire de sphères, *Th. Reye* [J. reine angew. Math. 78 (1874), p. 345] et *E. Study* [id. 94 (1883), p. 223].

381) *L. O. Hesse,* J. reine angew. Math. 20 (1840), p. 297; Werke, Munich 1897, p. 39; Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 197; la première démonstration synthétique est due à *K. G. Chr. von Staudt,* Beiträge zur Geometrie der Lage, fasc. 3, Nuremberg 1860, p. 372; *P. Serret* [J. math. pures appl. (2) 7 (1862), p. 377; Géom. de direction[14]), p. 317] donne une démonstration fondée sur l'emploi des coordonnées polyédriques; voir *Th. Reye,* J. reine angew. Math. 82 (1877), p. 66; *J. N. Bischoff,* Ann. mat. pura appl. (2) 6 (1873/5), p. 232; *H. R. Baltzer,* Analyt. Geom.[95]), p. 499; **G. Papelier,* Coord. tangent.[59]) 2, p. 200; *E. Duporcq,* Géom. moderne[361]), p. 103.* **Cl. Servais,* Acad. Belgique classe sc., Mémoires in 8°, (2) 1 (1904/6), mém. n° 2, p. 49.*

382) *L. O. Hesse,* J. reine angew. Math. 20 (1840), p. 301; Werke, Munich 1897, p. 197; Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 197; *O. Staude,* Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 854.

383) *L. O. Hesse,* Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 204.

384) Archiv Math. Phys. (1) 4 (1844), p. 205; *L. O. Hesse*, J. reine angew. Math. 18 (1838), p. 107; Werke, Munich 1897, p. 8; *M. Chasles,* J. math. pures appl. (1) 2 (1837), p. 400; *H. R. Baltzer,* Analyt. Geom.[95]), p. 506.

385) Syst. Entw.[85]), p. 313, Werke 1, p. 452.

60. Polygones autopolaires. Dans un tétraèdre autopolaire considéré comme système de quatre points, un point est le pôle d'une face, c'est-à-dire du plan déterminé par les trois autres points.

On a étendu cette notion à un ensemble de plusieurs points. Un pentagone gauche autopolaire est tel que chaque côté contient le pôle du plan déterminé par les trois points non situés sur ce côté; un hexagone gauche autopolaire est tel que le plan, qui contient trois sommets, passe par le pôle du plan qui contient les trois autres sommets.

Dans tous les cas, deux plans qui contiennent dans leur ensemble tous les sommets sont conjugués par rapport à la quadrique.

P. Serret[386]) a été conduit à considérer de tels polygones par l'emploi des coordonnées polygonales et polyédriques. Plus tard *Th. Reye*[387]) a étudié d'une façon systématique les polygones autopolaires en général.

On appelle *système conjugué de droites* (konjugiertes System) un ensemble de droites tel que chacune d'elles est conjuguée (au sens de *K. G. Chr. von Staudt*) [n° **57**] de toutes les autres. *J. Rosanes*[388]) a montré qu'un tel système contenait au plus six droites.

Aux tétraèdres autopolaires correspondent dans la géométrie réglée les systèmes de six complexes linéaires qui sont deux à deux en involution[389]).

61. Le complexe des axes d'une quadrique. *Th. Reye* désigne sous le nom d'*axe* d'une quadrique la perpendiculaire menée d'un point sur son plan polaire; un axe est aussi une droite perpendiculaire à sa polaire réciproque. Les axes d'une quadrique forment, au point de vue de la géométrie réglée de *J. Plücker,* un complexe que l'on appelle le *complexe des axes.*

L'origine de la théorie des axes remonte à *J. P. M. Binet*[390]); il a montré que les axes principaux d'inertie d'un système solide relatifs aux divers points de l'espace sont les normales (d'une multiplicité d'ordre trois) d'un système de quadriques homofocales, qui ont pour centre commun le centre de gravité du solide et pour axes de symétrie les axes principaux d'inertie relatifs à ce centre de gravité. *A. M. Ampère*[391]) reconnut que celles de ces normales qui passent par un point sont situées

---

386) Géom. de direction[14]), p. 56. Sur les coordonnées polygonales et polyédriques, voir *E. Bobillier,* Ann. math. pures appl. 18 (1827/8), p. 324; *J. Plücker,* J. reine angew. Math. 5 (1830), p. 31; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 153; *O. Hermes,* J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 249.

387) J. reine angew. Math. 77 (1874), p. 269.

388) Math. Ann. 23 (1884), p. 416.

389) *F. Klein,* Math. Ann. 2 (1870), p 198; **G. Kœnigs,* Géom. réglée[73]), p. 92.*

390) J. Éc. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 41.

391) Mém. Acad. sc. Institut France (2) 5 (1821/2), éd. 1826, p. 99.

sur un cône équilatère, qui est le cône du complexe. D'après *C. G. J. Jacobi*[392]), ces normales sont les axes de symétrie des cônes circonscrits à ces surfaces homofocales et, d'après *M. Chasles*[393]), chacune est le lieu du pôle d'un plan fixe par rapport à ces quadriques. Du résultat trouvé par *A. M. Ampère, M. Chasles* déduisit par dualité que les normales situées dans un plan sont tangentes à une parabole[394]) (courbe du complexe).

Le complexe des axes d'une quadrique coïncide avec celui des normales à un système de quadriques homofocales à la première, ainsi qu'avec celui des axes de symétrie des sections planes de cette quadrique; il n'est qu'un cas particulier du *complexe tétraédral*[395]).

Les segments déterminés sur les axes d'une quadrique à centre par les plans principaux de cette quadrique ont des rapports constants.

Les normales d'une quadrique [n° **35**] appartiennent au complexe de ses axes; elles forment une congruence du sixième ordre et de seconde classe. Elles ont été étudiées à ce point de vue par *Th. Reye*[396]) et *R. Sturm*[397]).

62. Surfaces des centres de courbure, surfaces parallèles, surfaces dérivées. *G. Monge*[398]) a rattaché l'étude du lieu des centres de courbure à l'étude des normales; l'équation de ce lieu a été donnée par *G. Salmon*[399]). Un modèle de cette surface, construit par *H. A. Schwarz*, fut modifié par *E. E. Kummer*[400]).

392) J. reine angew. Math. 12 (1834), p. 137/40; Werke 7, Berlin 1891, p. 7/10; *M. Chasles*, Aperçu hist.[41]), (2e éd.) p. 387.

393) Aperçu hist.[41]), (2e éd.) p. 397, 399.

394) *M. Chasles*, J. math. pures appl. (1) 4 (1839), p. 350.

395) *Th. Reye*, Geom. der Lage[307]), (1re éd.) 2, p. 147; trad. *O. Chemin* 2, p. 184; Ann. mat. pura appl. (2) 2 (1868/9), p. 1; voir *G. Darboux*, Bull. sc. math. (1) 2 (1871), p. 41, 301; *E. Schilke*, Z. Math. Phys. 19 (1874), p. 550; *A. Mannheim*, Assoc. fr. avanc. sc. 6 (Le Hâvre) 1877, p. 167; *E. Waelsch*, Sitzgsb. Akad. Wien 95 II (1887), p. 781; *Cl. Servais*, Mathesis (3) 3 (1903), p. 185/92; *G. Kilbinger* [Progr. Mulhouse 1896] a étudié le complexe des axes des quadriques de révolution. Sur le rôle du complexe des axes dans la théorie des axes permanents de rotation, voir *J. Hadamard*, Assoc. fr. avanc. sc. 24 (Bordeaux) 1895², p. 175; *O. Staude*, Ber. Ges. Lpz. 51 (1899), math. p. 219; *K. Zindler*, Festschrift L. Boltzmann, Leipzig 1904, p. 34; pour l'historique voir *Th. Reye*, Geom. der Lage[307]), (3e éd.) 2, p. 147; trad. *O. Chemin* 2, p. 184; *E. Kötter*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 5² (1896), Leipzig 1901, p. 403; *O. Staude*, Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 459/69.

396) Geom. der Lage[307]), (3e éd.) 2, p. 142; (3e éd.) 3, Leipzig 1892, p. 44; trad. *O. Chemin* 2, p. 191; J. reine angew. Math. 93 (1882), p. 81.

397) Liniengeometrie[195]) 1, p. 374; voir aussi *O. Böklen*, J. reine angew. Math. 96 (1884), p. 169.

398) Applic. de l'analyse à la géom.[176]), (5e éd.) p. 124.

399) Quart. J. pure appl. math. 2 (1858), p. 217.

400) Monatsb. Akad. Berlin 1862, p. 426; Abh. Akad. Berlin 1866, math. Abh. p. 94; voir d'autres modèles dans *W. von Dyck*, Katalog[149]), p. 282.

La théorie analytique de la développée d'une quadrique fut l'objet de travaux ultérieurs de *A. Clebsch*[401]).

Les surfaces parallèles aux quadriques furent étudiées par *A. Cayley*[402]), les surfaces dérivées de l'ellipsoïde furent étudiées par *L. I. Magnus*, après avoir été déjà rencontrées par *J. Fresnel* comme surfaces d'élasticité[403]).

Génération et construction des quadriques.

63. Génération par éléments homographiques de même rang. Éléments de rang un. *J. N. P. Hachette*[404]) a donné la génération du cône orthogonal et *J. P. M. Binet*[405]) celle de l'hyperboloïde orthogonal au moyen de l'intersection de faisceaux de plans, tels que deux plans homologues soient rectangulaires[406]).

Meier Hirsch[407]) et *G. Giorgini*[408]) ont montré que le paraboloïde hyperbolique peut être engendré par une droite joignant les points homologues de deux divisions semblables[407]); *M. Chasles*[409]) a

401) J. reine angew. Math. 62 (1863), p. 64; voir aussi *G. Darboux*, Bull. sc. math. (1) 3 (1872), p. 122; *A. Cayley*, Trans. Cambr. philos. Soc. 12 (1871/8), p. 319 [1873]; Papers 8, Cambridge 1895, p. 316; *E. N. Laguerre*, C. R. Acad. sc. Paris 78 (1874), p. 556; Œuvres 2, Paris 1905, p. 368; *W. Stahl*, J. reine angew. Math. 101 (1887), p. 73; pour le paraboloïde elliptique, voir *F. Caspary*, J. reine angew. Math. 81 (1876), p. 143; *E. Waelsch*, Nova Acta Acad. Leopold. 52 (1888), p. 287; Sitzgsb. Akad. Wien 97 IIa (1888), p. 583.

402) Ann. mat. pura appl. (1) 3 (1860), p. 345. Papers 4, Cambridge 1891, p. 158; Messenger math. (2) 5 (1876), p. 191 [1870]; Papers 8, Cambridge 1895, p. 480; *E. Schulze*, Diss. Halle 1886; *A. Ahrendt*, Diss. Rostock 1888; *Th. Craig*, J. reine angew. Math. 93 (1882), p. 251.

403) „Étant donnée une surface, on mène le plan tangent en un point P; d'un point fixe O, on abaisse la perpendiculaire OP_1 sur ce plan et dans le plan POP_1 on détermine un point Q tel que

$$\widehat{OP, OQ} = m \cdot \widehat{OP, OP_1}, \quad OQ = OP_1^m \cdot OP^{1-m};$$

le lieu du point Q est appelé la surface dérivée d'ordre m de la surface lieu de P."

L. I. Magnus, Aufgaben aus der analyt. Geom.[37]) 2, p. 402; sur les surfaces dérivées d'ordre $\frac{1}{2}$ et leur représentation en coordonnées elliptiques, voir *W. Roberts*, Ann. mat. pura appl. (1) 4 (1861), p. 143; *O. Staude*, Diss. Leipzig 1881, p. 58; *F. Spencker*, Diss. Rostock 1888.

404) Correspondance sur l'Éc. polyt. 1 (1804/8), p. 179.

405) Id. 2 (1809/13), p. 71; *J. N. P. Hachette*, J. reine angew. Math. 1 (1826), p. 339.

406) Le théorème dualistique a été donné par *J. V. Poncelet*, J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 49.

407) Sammlung geometrischer Aufgaben 2, Berlin 1807, p. 238.

408) Correspondance sur l'Éc. polyt. 2 (1809/13), p. 440 [1812].

409) Id. 2 (1809/13), p. 446 [1813].

de même établi que la surface engendrée par une droite qui joint les points homologues de deux divisions homographiques est un hyperboloïde à une nappe (sans d'ailleurs être à cette époque en possession de la théorie de la correspondance homographique).

La génération des surfaces réglées du second ordre par des faisceaux de plans homographiques est contenue implicitement dans la représentation analytique des génératrices due à *A. L. Cauchy* et à *J. Plücker* [n° **39**]. Elle fut indiquée d'une façon systématique par *J. Steiner*[410]) ainsi que la génération par les droites joignant des points homologues de deux divisions homographiques; ces générations devinrent la base de son étude des propriétés des quadriques.

C'est à ce même point de vue que se sont placés *K. G. Chr. von Staudt*[411]), *Th. Reye*[412]) et *H. Schröter*[413]).

64. Génération par plans et droites en correspondance homographique. Éléments de rang deux. Les modes de génération précédents [n° **63**] ne conduisent qu'à des quadriques réglées, si l'on ne considère que des éléments réels; le mode de génération indiqué par *F. Seydewitz*[414]) ne présente pas le même inconvénient; il repose sur la proposition suivante. Le lieu du point de rencontre des plans et des droites homologues de deux gerbes (de plans et de droites) qui se correspondent homographiquement est une quadrique.

K. G. Chr. von Staudt[415]), *Th. Reye*[416]) et *H. Schröter*[417]) ont développé ce point de vue et *W. Fiedler*[418]) s'en est occupé au point de vue analytique.

410) Syst. Entw.[85]), p. 194; Werke 1, p. 370; *M. Chasles* [Aperçu hist.[41]), (2e éd.) p. 626] signale le mode de génération de *J. Steiner*. Sur les modèles correspondants de *E. Lange* et *K. Fischer*, ainsi que sur ceux de *F. Buka*, voir *W. von Dyck*, Katalog[149]), p. 260, 276.

411) Geom. der Lage[46]), p. 55.

412) Geom. der Lage, (3e éd.) 3, Leipzig 1892, p. 122.

413) Oberflächen zweiter Ordnung[105]), p. 87.

414) Archiv Math. Phys. (1) 9 (1847), p. 158.

415) Beiträge zur Geom. der Lage, fasc. 1, Nuremberg 1856, p. 29.

416) Geom. der Lage[307]), (3e éd.) 2, p. 35.

417) Oberfläche zweiter Ordnung[105]), p. 452; *R. Sturm*, Geometrische Verwandtschaften 2, Leipzig 1908, p. 207; *F. Schur*, Festschrift Heinrich Weber zu seinem siebzigsten Geburtstag, Leipzig et Berlin 1912, p. 291.

418) Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, (3e éd.) 3, Leipzig 1888, p. 533; *W. Fiedler* dans *G. Salmon*, Analytische Geometrie des Raumes, (4e éd.) 1, Leipzig 1898, p. 190. Ce mode de génération est connexe à la génération à l'aide du „tétraèdre osculateur polaire" [voir à ce sujet *O. Staude*, Analyt. Geom. der Fläche zweiter Ordnung[99]), p. 901/7].

A. Schoenflies[419]) a obtenu certaines quadriques de révolution en considérant deux gerbes telles que l'angle de deux plans de la première gerbe soit égal à celui des rayons homologues de la seconde gerbe.

65. Génération par correspondance entre points et plans. Éléments de rang trois. *L. I. Magnus*[420]), puis *A. Cayley*[421]) et *H. Schröter*[422]) ont établi une correspondance entre point et plan telle que *les coefficients de l'équation d'un plan soient linéaires et homogènes par rapport aux coordonnées tétraédriques du point homologue;* dans cette corrélation (qui est la même que celle de la p. 65) un point situé dans le plan homologue décrit une quadrique Q et le plan enveloppe une autre quadrique Q'; Q et Q' sont les surfaces fondamentales de la corrélation[423]).

Si la corrélation est la réciprocité polaire, les quadriques Q et Q' coïncident et constituent la surface directrice (Ordnungsfläche) [n° **56**].

66. Construction d'une quadrique passant par neuf points. *G. Lamé*[424]) s'est le premier occupé du problème de la construction d'une quadrique passant par neuf points donnés; il a cherché à en déterminer le centre et un système de trois diamètres conjugués.

La première solution complète est due à *L. O. Hesse*[425]) et repose sur la théorie des polaires relatives à un réseau de quadriques.

M. Chasles[426]) a donné une construction reposant sur la détermination de trois sections planes de la quadrique situées dans des plans passant chacun par trois des neuf points. C'est sur la même idée que repose la solution publiée par *C. F. Geiser*[427]) d'après *J. Steiner*, et qui fut plus tard l'objet de nombreuses simplifications avant de recevoir la forme définitive que lui donna *K. Rohn*[428]).

419) J. reine angew. Math. 99 (1886), p. 195/204.

420) Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 2, p. 120.

421) J. reine angew. Math. 38 (1849), p. 97; Papers 1, Cambridge 1889, p. 414.

422) J. reine angew. Math. 77 (1874), p. 105.

423) *Cette génération a l'avantage de donner à la fois les quadriques réelles et les quadriques imaginaires tout en partant toujours d'éléments réels (Note de *G. Loria*).*

424) Examen[44]), p. 68; *M. Chasles*, Aperçu hist.[41]), (2e éd.) p. 245, 400.

425) J. reine angew. Math. 24 (1842), p. 36; Werke, Munich 1897, p. 51; reproduit par *R. Townsend*, Cambr. Dublin math. J. 4 (1849), p. 341; la solution de *L. O. Hesse* a été perfectionnée par *J. Thomae*, Ber. Ges. Lpz. 44 (1892), math. p. 543/55; id. 49 (1897), math. p. 315/28 où est considéré le cas où certains points sont imaginaires.

426) C. R. Acad. sc. Paris 41 (1855), p. 1097.

427) J. reine angew. Math. 68 (1868), p. 191 (d'après des manuscrits posthumes de *J. Steiner*).

La détermination de faisceaux de droites et de plans en correspondance homographique au moyen des neuf points conduit à une construction de *F. Seydewitz*[429]), ainsi qu'à celle de *H. Schröter*[430]). La théorie des plans polaires dans un faisceau de quadriques a fourni une solution due à *K. G. Chr. von Staudt*[431]), et *R. Sturm*[432]) est parvenu à une construction basée sur la correspondance homographique entre points déduits des points donnés par projection sur un plan, les centres de projection étant deux des points.

M. Chasles[433]), *J. Steiner*[434]) et d'autres géomètres[435]) ont cherché à généraliser le *théorème de Pascal*[436]) en étudiant les propriétés d'un tétraèdre relativement à son intersection avec une quadrique.

67. Quadrique passant par une conique et quatre points. *G. Lamé*[437]) a le premier étudié le problème de la détermination d'une quadrique dont on donne une section plane et quatre points, et *K. G. Chr. von Staudt*[438]) a résolu complètement le problème[439]).

428) *H. Müller*, Math. Ann. 1 (1869), p. 627; *R. Heger*, Z. Math. Phys. 25 (1880), p. 98; *J. Cardinaal*, id. 27 (1882), p. 119; *H. Liebmann*, id. 41 (1896), p. 120; *J. Kleiber*, id. 41 (1896), p. 228; *H. Schröter*, Oberflächen zweiter Ordnung[105]), p. 462; *K. Rohn*, Ber. Ges. Lpz. 46 (1894), math. p. 160; *K. Rohn* et *E. Papperitz*, Darstellende Geom.[288]) 2, p. 186. La construction de *K. Rohn* peut être effectuée à l'aide d'un seul plan de projection.

429) Archiv Math. Phys. (1) 9 (1847), p. 158.

430) J. reine angew. Math. 62 (1863), p. 215; *L. Burmester*, Math. Ann. 14 (1879), p. 472; **Ch. Méray*, Nouv. Ann. math. (4) 6 (1906), p. 289; *R. Gidály*, Sitzgsb. Akad. Wien 116 II^a (1907), p. 1113/9.*

431) Beiträge zur Geometrie der Lage, fasc. 1, Nuremberg 1856, p. 380; *Th. Reye*, Z. Math. Phys. 13 (1868), p. 527; *C. Hossfeld* [id. 33 (1888), p. 180] s'occupe du cas où les points sont imaginaires.

432) Math. Ann. 1 (1869), p. 544; cf. *R. Sturm*, Die Lehre von den Geometrischen Verwandtschaften 2, Leipzig et Berlin 1908, p. 204.

433) Aperçu hist.[41]), (2^e éd.) p. 400.

434) Ann. math. pures appl. 19 (1828/9), p. 4; Werke 1, Berlin 1881, p. 186.

435) Voir aussi, *T. Weddle*, Cambr. Dublin math. J. 4 (1849), p. 26; 5 (1850), p. 58, 226; 6 (1851), p. 114; 7 (1852), p. 10; *O. Hermes*, J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 234; *P. Serret*, Géom. de direction[14]), p. 434, 515; C. R. Acad. sc. Paris 82 (1876), p. 162, 270; *J. (E.) Hunyady* [J. reine angew. Math. 89 (1880), p. 47] établit la liaison analytique de ces différents théorèmes [III 17, **26**]. *F. Klein* [Math. Ann. 22 (1883), p. 246] a également donné une généralisation du théorème de Pascal.

436) **H. Neumann* [Monatsh. Math. Phys. 11 (1900), p. 114/7] a étudié une question plus générale (Note de *G. Loria*).*

437) Examen[44]), p. 62.

438) Geom. der Lage[46]), p. 201; Beiträge zur Geometrie der Lage, fasc. 1, Nuremberg 1856, p. 292.

439) Voir *H. G. Zeuthen*, Math. Ann. 18 (1881), p. 33.

Un cas particulier intéressant est celui de la détermination d'une sphère passant par quatre points et de la recherche de la condition qui lie cinq points d'une sphère[440]).

68. Générations particulières. *Ch. Dupin*[441]) considère la quadrique comme lieu d'un point fixe d'une droite dont trois autres points fixes décrivent trois plans donnés. *R. Sturm*[442]) a étudié la congruence formée par ces droites. *M. Chasles*[443]) considère l'hyperboloïde orthogonal comme lieu d'un point dont le rapport des distances à deux droites fixes est constant. *Chr. Gudermann*[444]) donne la construction de l'ellipsoïde au moyen de trois sphères concentriques. Pour d'autres constructions, voir n^{os} **78** à **80**.

69. Déterminations multiples. *J. Steiner*[445]) a posé le problème de la recherche du nombre des quadriques qui touchent neuf droites données.

H. Schubert[446]) a déterminé le nombre des quadriques tangentes à neuf quadriques données.

D'autres problèmes du même genre ont été résolus au moyen de la géométrie énumérative.

Propriétés focales des quadriques.

70. Le système homofocal. *La notion de foyer d'une quadrique ne s'est présentée qu'assez tard dans le développement de la théorie des quadriques; le système de quadriques homofocales a été rencontré dans des recherches sur l'attraction et ce ne fut que peu à peu qu'on en fit une étude systématique en le rattachant à de pures théories géométriques.*

440) *P. A. Luchterhandt*, J. reine angew. Math. 23 (1842), p. 375; *A. F. Möbius*, id. 26 (1843), p. 26; Werke 1, Leipzig 1885, p. 583; *F. Joachimsthal* [J. reine angew. Math. 40 (1850), p. 21] a donné cette condition sous forme de déterminant. Voir *G. Bauer*, Sitzgsb. Akad. München 3 (1873), p. 343; *G. Darboux*, Ann. Éc. Norm. (2) 1 (1872), p. 323; *G. Frobenius*, J. reine angew. Math. 79 (1875), p. 223; *Th. Reye*, Synth. Geom. der Kugeln[342]), p. 75; *A. Schumann*, Z. Math. Phys. 27 (1882), p. 368; *H. R. Baltzer*, Analyt. Geom.[95]), p. 368; Determ.[91]), (4^e éd.) p. 230; **E. Rouché* et *Ch. de Comberousse*, Traité de géométrie, (4^e éd.) 2, Paris 1879, p. 545.*

441) Correspondance sur l'Éc. polyt. 1 (1804/8), p. 134 [1806]; J. Éc. polyt. (1) cah. 14 (1808), p. 45; Géom.[9]), p. 340. Voir *E. Lucas*, Mathesis (1) 1 (1881), p. 65; *A. Mannheim*, Nouv. Ann. math. (3) 8 (1889), p. 308.

442) Liniengeometrie[135]) 2, p. 195, *H. Menzel*, Diss. Munster en/W. 1891.

443) J. math. pures appl. (1) 1 (1836), p. 324; *A. Schoenflies*, Diss. Berlin 1877; Z. Math. Phys. 23 (1878), p. 245, 269; 24 (1879), p. 62; *H. Schröter*, J. reine angew. Math. 85 (1878), p. 26; *H. Milinowski*, id. 85 (1878), p. 88.

444) J. reine angew. Math. 42 (1851), p. 282.

445) Syst. Entw.[85]), Anhang, (problème 73); Werke 1, p. 453.

446) *M. Chasles*, C. R. Acad. sc. Paris 62 (1866), p. 405; *H. Schubert*, Abzählende Geom.[119]), p. 102. Cf. III 18, **31** et III 28.

On peut distinguer trois époques dans le développement de la notion de quadriques homofocales[447]).

Une première période s'ouvre avec les recherches de *P. S. Laplace*[448]) sur l'attraction des ellipsoïdes homogènes. On y trouve l'équation générale des ellipsoïdes homofocaux à un ellipsoïde, ainsi que l'équation du troisième degré qui détermine les trois quadriques du système qui passent par un point donné; une seule racine intervient d'ailleurs dans le problème de l'attraction. Partant du même point de vue, *J. Ivory*[449]) et *C. F. Gauss*[450]) rencontrèrent les ellipsoïdes homofocaux dans leurs recherches[451]).

La seconde époque date des travaux de *Ch. Dupin*[452]) qui étudie le système homofocal en lui-même, considérant l'ensemble des quadriques à centre homofocales, d'une part, et l'ensemble des paraboloïdes homofocaux, d'autre part; *ce ne sont pas d'ailleurs les foyers ou les focales qui servent à définir ces systèmes, ce sont simplement les foyers des sections principales.* Il signale l'existence des trois familles de surfaces, ainsi que la propriété d'orthogonalité, découverte en même temps par *J. P. M. Binet*[453]).

Le système des cônes homofocaux fut plus tard étudié par *M. Chasles*[454]). La théorie des quadriques homofocales reçut une importante contribution des travaux de *C. G. J. Jacobi*[455]), qui établit que les cônes, circonscrits à des quadriques homofocales et ayant un sommet donné, forment un système de cônes homofocaux dont les axes sont les normales menées du sommet aux trois quadriques qui passent par ce point et dont les focales réelles sont les génératrices de la quadrique réglée du système qui passe par ce point. *J. Mac-Cullagh*[456]) a établi ces théorèmes analytiquement en rapportant les cônes circonscrits à leurs axes de symétrie.

D'autres développements de la théorie sont dus à *G. Lamé* et à *M. Chasles*[457]).

La troisième époque commence lorsque *M. Chasles* montre que le système homofocal n'est autre qu'un faisceau tangentiel[458]) de quadriques; cette remarque, justifiée analytiquement par *J. Plücker*, a jeté un jour tout nouveau sur la théorie et a été le point de départ de toutes les recherches ultérieures.

71. Les focales considérées comme surfaces limites. *P. S. Laplace*[459]) avait signalé la dégénérescence de l'ellipsoïde en une conique; *Ch. Dupin*[460]) utilisa la remarque de *P. S. Laplace* et obtint les focales communes aux quadriques comme surfaces limites du système homofocal; ces coniques servaient d'intermédiaires pour passer d'une quadrique d'un genre à une quadrique d'un autre genre.

Toutefois, ce fut *M. Chasles*[461]) qui le premier reconnut dans ces surfaces limites les *quatre surfaces singulières* d'un faisceau tangentiel, en y comprenant, outre les trois focales, l'ombilicale.

72. Les focales, lieux des sommets des cônes de révolution circonscrits. *Ch. Dupin*[462]) montre que le lieu des sommets des cônes

447) Cf. III 18, **20**.

448) Mécanique céleste (1re éd.) 2, Paris an VII, p. 16; Œuvres 2, Paris 1878, p. 20.

449) Philos. Trans. London 99 (1809), p. 350.

450) Commentat. Soc. Gott. recent. 2 (1813), formules (4) et (5) du § 13; Werke 5, Göttingen 1877, p. 19.

451) Voir *M. Chasles*, Aperçu hist.[41]), (2e éd.) p. 164.

452) Géom.[9]), p. 269. Cf. IV 4, **77**.

453) J. Éc. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 59.

454) Cônes du second degré[371]) [Nouv. Mém. Acad. Bruxelles 6 (1830), mém. nº 11, p. 28].

455) J. reine angew. Math. 12 (1834), p. 137; Werke 7, Berlin 1891, p. 7; voir *M. Chasles*, J. math. pures appl. (1) 11 (1846), p. 121; *J. Plücker*, System der Geom. des Raumes[32]), p. 334.

456) Proc. Irish Acad. (Dublin) (1) 2 (1840/4), p. 494 [1843]; Works, Dublin et Londres 1880, p. 311; voir *A. Cayley*, Cambr. Dublin math. J. 1 (1846), p. 278; 3 (1848), p. 48; Papers 1, Cambridge 1889, p. 255, 362; *J. Y. Rutledge*, Cambr. Dublin math. J. 5 (1850), p. 110/31; *A. Wangerin*, Z. Math. Phys. 34 (1889), p. 126; **L. F. Painvin*, Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 339.*

457) *G. Lamé*, Ann. chim. et phys. (2) 53 (1833), p. 199; J. math. pures appl. (1) 2 (1837), p. 156; *M. Chasles*, Aperçu hist.[41]), p. 384/99. L'expression *quadriques homofocales* n'apparaît pas dans *P. S. Laplace, J. Ivory, C. F. Gauss, Ch. Dupin, J. P. M. Binet*, ni avant 1837 dans *M. Chasles*; *G. Lamé* l'a employée en 1833 et 1837. *L. I. Magnus* [Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 1, Berlin 1833, p. 204] appelle à la même époque *confocales* deux coniques qui ont un foyer commun et [id. 2, Berlin 1837, p. 353] deux quadriques de révolution qui ont un foyer commun. Par contre, *C. G. J. Jacobi* [J. reine angew. Math. 12 (1834), p. 137; Werke 7, Berlin 1891, p. 7] désigne sous le nom de *quadriques confocales* des quadriques dont les sections principales ont les mêmes foyers.

458) *M. Chasles*, Aperçu hist.[41]), p. 396; J. math. pures appl. (1) 13 (1848), p. 16; *J. Plücker*, System der Geom. des Raumes[32]), p. 255, 325, 331; voir *O. Hermes*, Diss. Breslau 1849; *L. O. Hesse*, Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 341; **G. Papelier*, Coord. tangent.[69]) 2, p. 318, *E. Duporcq*, Géom.[361]), p. 88, 91.*

459) Mécanique céleste[448]), (1re éd.) 2, p. 21; Œuvres 2, p. 23.

460) Géom.[9]), p. 277, 309.

461) Aperçu hist.[41]), p. 397; il appelle les focales «coniques excentriques», et lignes de striction des développables circonscrites; au point de vue analytique, voir *J. Plücker*, System der Geom. des Raumes[32]), p. 255, 325, 331; *K. G. Chr. von Staudt*, Beiträge[58]), fasc. 3, Nuremberg 1860, p. 383; sur la généralisation projective, voir *G. Darboux*, Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, Paris 1873, p. 177.

462) Correspondance sur l'Éc. polyt. 2 (1809/13), p. 424; Géom.[9]), p. 280.

de révolution qui passent par une conique est une autre conique, résultat[463]) qui fut généralisé par *J. Steiner*[464]); il établit le premier que le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à une quadrique est l'ensemble de ses focales.

Ch. Dupin[465]) démontre que les focales communes aux quadriques d'un système homofocal sont également le lieu des ombilics de ces quadriques.

73. Focales et axes focaux. *M. Chasles*[466]) a démontré que les focales d'un cône du second ordre envisagées par *L. I. Magnus*[467]) [n° **76**] sont les supports d'involutions orthogonales de plans conjugués relativement au cône.

Des droites jouissant de cette propriété relativement à une quadrique quelconque furent ensuite étudiées; on leur donna le nom d'*axes focaux*[468]).

J. Plücker[469]) a remarqué que les tangentes aux focales d'une quadrique sont des axes focaux. D'une façon générale, les génératrices rectilignes des surfaces d'un système homofocal sont des axes focaux pour chacune d'elles[470]).

463) *Ce résultat peut être déduit de quelques propositions d'*Apollonius* [*Κωνικά*, livre 1, prop. 52/6; Quae graece exstant, éd. *J. L. Heiberg* 1, Leipzig 1891, p. 158/80] où il s'agit de construire *un* cône de révolution passant par une conique (Note de *G. Eneström*).* Cf. *O. Staude*, Flächen zweiter Ordnung[99]), p. 964 (note 144).

464) J. reine angew. Math. 1 (1826), p. 47; Werke 1, Berlin 1881, p. 11; dans *A. M. Ampère* [Mém. Acad. sc. Institut France (2) 5 (1821/2), éd. 1826, p. 99] les focales apparaissent comme le lieu des points pour lesquels il y a une infinité simples d'axes permanents de rotation; dans *J. P. M. Binet* [J. Éc. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 63] elles apparaissent comme lieu des points pour lesquels deux axes principaux d'inertie sont égaux; le théorème de *J. Steiner* est donné comme cas particulier d'un théorème plus général dans *C. G. J. Jacobi* [J. reine angew. Math. 12 (1834), p. 137/40; Werke 7, Berlin 1891, p. 7/10]; *J. Plücker* [System der Geom. des Raumes[32]), p. 250] s'en est occupé en se servant de coordonnées tangentielles; *C. F. Geiser* [J. reine angew. Math. 82 (1877), p. 47] a trouvé que le lieu est, en général, une surface du huitième ordre *dont les parties réelles sont justement les focales.*

465) Géom.[9]), p. 278, 282; voir *H. R. Baltzer*, Analyt. Geom.[95]), p. 531.

466) Cônes[371]), Nouv. Mém. Acad. Bruxelles 6 (1830), mém. n° 11, p. 11; pour l'hyperboloïde orthogonal, voir *H. Schröter*, Monatsb. Akad. Berlin 1877, p. 594.

467) Ann. math. pures appl. 16 (1825/6), p. 33; Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 2, p. 170. Des recherches ultérieures se rencontrent dans *M. Chasles*, Cônes[371]), Nouv. Mém. Acad. Bruxelles 6 (1830), mém. n° 11, p. 16.

468) *O. Staude*, Fläche zweiter Ordnung[99]) 1, p. 973, note 177. Cf. III 17, **49**.

469) System der Geom. des Raumes[32]), p. 333.

470) *Th. Reye*, Geom. der Lage[207]), (4e éd.) 2, p. 153; trad. *O. Chemin* 2, p. 202.

74. Les focales comme courbes directrices d'un système polaire. D'après *M. Chasles*[471]), le plan tangent et la normale en un point d'une quadrique déterminent sur un plan principal une droite et un point qui sont polaire et pôle relativement à la focale située dans ce plan.

La même propriété subsiste si, au lieu du plan tangent et de la normale, on prend un plan quelconque et la droite lieu de ses pôles par rapport aux surfaces du système homofocal dont fait partie la quadrique[472]).

75. Les foyers, centres de sphères bitangentes de rayon nul. *B. Amiot*[473]) a défini les foyers d'une quadrique (points des focales) comme points tels que, si a, b, c en sont les coordonnées rectangulaires, il soit possible de mettre l'équation de la surface sous la forme

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - U \cdot V = 0,$$

où U et V sont les premiers membres des équations de deux plans.

M. Chasles[474]) et *J. Plücker*[475]) ont interprété cette définition analytique en considérant un foyer comme centre d'une sphère de rayon nul bitangente à la quadrique.

B. Amiot[473]) a donné une théorie des foyers des quadriques analogue à celle des foyers des coniques; il a introduit la notion de *directrice*, droite joignant les points de contact de la quadrique et de la sphère bitangente de rayon nul; c'est une droite réelle en même temps que le foyer; elle est l'intersection des plans

$$U = 0, \quad V = 0,$$

qui sont réels ou imaginaires, *même lorsque le foyer est réel;* on les appelle *plans de la directrice*. *On distingue[476]) deux espèces de foyers réels, suivant que les plans de la directrice correspondante sont réels ou imaginaires.*

471) Aperçu hist.[41]), p. 384; *J. Plücker*, System der Geom. des Raumes[32]), p. 332; J. reine angew. Math. 35 (1847), p. 103; Wiss Abh. 1, Leipzig 1895, p. 459.

472) *Th. Reye*, Geom. der Lage[207]), (4e éd.) 2, p. 150; trad. *O. Chemin* 2, p. 203; **Cl. Servais*, Acad. Belgique, classe sc., Mémoires in 8°, (2) 1 (1904/6), mém. n° 2, p. 31.*

473) J. math. pures appl. (1) 8 (1843), p. 163; relativement aux surfaces de révolution, on trouve déjà une méthode analogue dans *P. L. M. Bourdon*, Correspondance sur l'Éc. polyt. 2 (1809/13), p. 197 [1811] et dans *L. I. Magnus*, Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 2, p. 354.

474) C. R. Acad. sc. Paris 16 (1843), p. 831.

475) System der Geom. des Raumes[32]), p. 276. Plus tard, *R. Townsend*, Cambr. Dublin math. J. 3 (1848), p. 97; *W. Fiedler*, Z. Math. Phys. 7 (1862), p. 299.

476) **L. F. Painvin*, Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie p. 315; *E. Pruvost*, Géom. analyt.[20]), p. 358, *B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]), p. 422.*

J. Mac-Cullagh[477]) a fait observer, ainsi que cela ressort de l'équation de *B. Amiot*, que les plans de la directrice sont les plans cycliques et que la section de la quadrique par le plan passant par le foyer et la directrice correspondante est une conique ayant ce même foyer et cette même directrice.

M. Chasles était en possession de ce théorème sauf pour ce qui concerne la directrice[478]).

*La détermination des foyers dépend ainsi de la recherche des plans cycliques et par suite de la résolution de l'équation en S [n° **24**]; dans le cas général où cette équation a ses racines distinctes, le foyer de première espèce, dont les plans de la directrice sont réels, correspond à la racine moyenne[476]).*

Les foyers sont les points des focales, courbes situées dans les plans principaux: pour l'ellipsoïde et pour l'hyperboloïde, les focales sont une hyperbole, une ellipse réelle et une ellipse imaginaire; pour les paraboloïdes, ce sont deux paraboles; pour le cône, ce sont des couples de droites dont un seul est formé de droites réelles, qui passent d'ailleurs par le sommet; pour le cylindre, les focales réelles sont des parallèles aux génératrices menées par les foyers réels d'une section droite; il n'y a qu'une telle droite si le cylindre est parabolique[479]).

*La détermination[480]) des focales en coordonnées tangentielles est particulièrement simple, si l'on utilise la remarque faite par *M. Chasles* [n° **71**] qu'une focale est une ligne double de la développable circonscrite à la quadrique et à l'ombilicale; *G. Darboux* a proposé de prendre cette propriété comme définition des foyers, dont il étend la notion à des surfaces algébriques quelconques et même aux courbes gauches.*

76. Propriétés focales des surfaces particulières. *Une surface de révolution[481]) du second ordre admet pour focale l'axe de révolution, qui correspond à la racine double de l'équation en S; elle admet une autre focale engendrée par les foyers de la section méridienne non situés sur l'axe; il est toutefois intéressant de considérer plus spécialement une surface de révolution engendrée par la rotation d'une conique autour de son axe focal; les foyers de cette conique sont ce que *Ch. Dupin* appelle les *foyers généraux* de la surface.* Il a montré que le cône ayant un foyer pour sommet et une section plane de la surface pour directrice est de révolution, que deux tangentes conjuguées déterminent avec le foyer deux plans rectangulaires. *M. Chasles*[482]) a étendu ces propriétés aux autres foyers.

On doit à *L. I. Magnus*[483]) d'avoir signalé la propriété relative aux focales du cône: la somme ou la différence des angles d'une génératrice avec les deux focales est constante.

Cette propriété résulte, comme l'a montré *O. Staude*[484]), de l'identité

$$a^2(a^2-d^2)(a^2-e^2)\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}+\frac{z^2}{a^2-e^2}\right]$$
$$=(x^2+y^2+z^2)\left(a^2-e^2\sin^2\frac{\varrho+\varrho'}{2}\right)\left(a^2-e^2\sin^2\frac{\varrho-\varrho'}{2}\right),$$

analogue à la propriété de l'ellipse et de l'hyperbole dans le plan qui résulte de l'identité

$$-a^2(a^2-e^2)\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-e^2}-1\right]=\left(a^2-\left(\frac{r+r'}{2}\right)^2\right)\left(a^2-\left(\frac{r-r'}{2}\right)^2\right)$$

comprenant comme cas particulier la propriété focale de l'ellipse qu'exprime l'égalité

$$r+r'=2a$$

et la propriété focale de l'hyperbole qu'exprime l'égalité

$$r-r'=\pm 2a.$$

77. Relations entre deux focales. *Ch. Dupin*[485]) a montré que la somme ou la différence des distances d'un point variable d'une focale à deux points fixes d'une autre focale est constante.

477) Works, Dublin et Londres 1880, p. 265; *J. Plücker*, System der Geom. des Raumes[32]), p. 295.

478) Relativement au cône, voir *M. Chasles*, Recherches de géométrie pure sur les lignes et les surfaces du second degré, Nouv. Mém. Acad. Bruxelles 5 (1829), mém. n° 13, p. 9; Cônes[371]), Nouv. Mém. Acad. Bruxelles 6 (1830), mém. n° 11, p. 11, 13; pour les quadriques en général, Aperçu hist.[41]), p. 391.

479) *L. F. Painvin*, Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie p. 316; *E. Pruvost*, Géom. analyt.[20]), p. 360.*

480) *M. Chasles*, Aperçu hist.[41]), p. 397; *G. Darboux*, C. R. Acad. sc. Paris 59 (1864), p. 240; *L. F. Painvin*, Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 333; *B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]), p. 443; *G. Papelier*, Coord. tangent.[69]), p. 305, 314.*

481) *Ch. Dupin*, Application de géométrie et de mécanique à la marine, Paris 1822, p. 210; *J. Steiner*, J. reine angew. Math. 1 (1826), p. 48; Werke 1, Berlin 1881, p. 12; *L. I. Magnus*, Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 2, p. 353; *K. G. Chr. von Staudt*, Geom. der Lage[46]), p. 215.

482) J. math. pures appl. (1) 1 (1836), p. 187; Aperçu hist.[41]), p. 667.

483) Ann. math. pures appl. 16 (1825/6), p. 33; Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 2, p. 170; *M. Chasles* a développé ces recherches et établi quelques théorèmes réciproques, Cônes[371]), Nouv. Mém. Acad. Bruxelles 6 (1830), mém. n° 11, p. 16.

484) Fläche zweiter Ordnung[99]) 1, p. 721.

485) Correspondance sur l'Éc. polyt. 1 (1804/8), p. 218; 2 (1809/13), p. 434 Géom.[9]), p. 280; voir *G. P. Dandelin*, Nouv. Mém. Acad. Bruxelles 2 (1822), mém. n° 6, p. 171/202; 3 (1826), mém. n° 2, p. 3/14; *C. G. J. Jacobi*, J. reine angew. Math. 12 (1834), p. 138; Werke 7, Berlin 1891, p. 8.

Cette proposition fut généralisée par *M. Chasles* et *J. Plücker*[486]), qui établirent que deux points quelconques d'une focale peuvent être considérés comme foyers d'une quadrique de révolution tangente à la surface le long d'une courbe plane.

78. Propriétés focales au point de vue d'Amiot et de Mac-Cullagh. De la définition [nº **75**] de *B. Amiot*[487]), il résulte immédiatement que le carré de la distance d'un point d'une quadrique à un foyer de première espèce est dans un rapport constant avec le produit des distances de ce point aux plans de la directrice correspondante.

La réciproque de cette proposition fournit une génération des surfaces du second ordre, qui admettent des ombilics, *puisque de telles surfaces ont toujours un système de plans cycliques réels, auquel correspondent des foyers de première espèce.*

Relativement aux foyers de seconde espèce, l'équation focale peut s'interpréter ainsi: la distance d'un point de la surface à un tel foyer est dans un rapport constant avec la distance du même point à la directrice correspondante, cette dernière distance étant comptée parallèlement à un des plans cycliques réels de la surface.

La réciproque de cette proposition fournit une génération de la surface du second ordre qui a été signalée par *J. Mac-Cullagh*[488]).

*Le rapport constant qui intervient ici a été appelé le *module*; il est égal à 1 pour le paraboloïde hyperbolique, si l'on convient ici de remplacer un plan cyclique par un plan directeur.*

79. Théorèmes d'Ivory et de Jacobi. Le *théorème d'Ivory* est relatif à une correspondance analogue à l'affinité entre les points de deux quadriques homofocales; *si les équations de deux surfaces de même nature sont

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad \frac{x'^2}{a'^2} \pm \frac{y'^2}{b'^2} \pm \frac{z'^2}{c'^2} - 1 = 0,$$

486) *M. Chasles*, C. R. Acad. sc. Paris 16 (1843), p. 1108; *J. Plücker*, System der Geom. des Raumes[32]), p. 259, 273; *L. O. Hesse*, Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 352.

487) *B. Amiot*, J. math. pures appl. (1) 8 (1843), p. 161; *J. Plücker*, System der Geom. des Raumes[32]), p. 289; *R. Townsend*, Cambr. Dublin math. J. 3 (1848), p. 1; *T. Weddle*, Cambr. Dublin math. J. 9 (1854), p. 67; *H. R. Baltzer*, Analyt. Geom.[95]), p. 525; *H. Schröter*, Oberflächen zweiter Ordnung[105]), p. 641; *_L. F. Painvin_, Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 324; *Cl. Servais*, Bull. Acad. Belgique (3) 26 (1893), p. 99; Mathesis (4) 2 (1912), p. 57.*

488) Proc. Irish Acad. (Dublin) (1) 2 (1840/4), p. 446 [1843]; Works, Dublin et Londres 1880, p. 267; *J. Plücker*, System der Geom. des Raumes[32]), p. 289; *R. Townsend*, Cambr. Dublin math. J. 3 (1848), p. 1; *H. Schröter*, Oberflächen zweiter Ordnung[105]), p. 641; *_L. F. Painvin_, Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 324; *Cl. Servais*, Bull. Acad. Belgique (3) 26 (1893), p. 94; Annaes Acad. polyt. Porto 2 (1907), p. 131/54.*

la correspondance entre les points de ces surfaces est définie par les relations

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'}, \quad \frac{y}{b} = \frac{y'}{b'}, \quad \frac{z}{c} = \frac{z'}{c'}.*$$

J. Ivory[489]) a montré, dans le cas des ellipsoïdes, que la distance de deux points de l'une des surfaces est égale à la distance des deux points correspondants de l'autre.

Ce théorème fut étendu aux hyperboloïdes et, en particulier, dans deux hyperboloïdes à une nappe, les génératrices se correspondent: tout segment porté sur l'une d'elles est égal au segment correspondant[490]).

Au théorème d'Ivory se rattache la proposition de *C. G. J. Jacobi*[491]): le lieu du point dont les distances à trois points fixes non en ligne droite sont liées par la relation qui lie les distances d'un point d'un plan aux trois sommets d'un triangle, est une surface du second ordre.

Appliqué à deux hyperboloïdes homofocaux, le théorème d'Ivory sert de base à la théorie de *O. Henrici* relative au *modèle déformable d'un hyperboloïde* (ou de deux hyperboloïdes déformables liés de façon à rester homofocaux). *O. Henrici* a exposé ce modèle en 1874 devant la Société mathématique de Londres.

En réponse à une question posée par *A. G. Greenhill* en 1878,

489) Philos. Trans. London 99 (1809), p. 353, 355, dans le cas de deux ellipsoïdes. Une nouvelle démonstration fut donnée par *M. Chasles*, J. math. pures appl. (1) 5 (1840), p. 485. La proposition corrélative fut donnée par *W. Fiedler*, Z. Math. Phys. 7 (1862), p. 310. *Pour une propriété des ordonnées de deux points correspondants, voir *Cl. Servais*, Bull. Acad. Belgique (3) 26 (1893), p. 97.*

490) *A. Cayley*, Messenger math. (2) 8 (1878/9), p. 51; Papers 11, Cambridge 1896, p. 66; voir *G. Durrande*, Ann. Éc. Norm. (2) 2 (1873), p. 116; *E. Lucas*, Nouv. Ann. math. (2) 20 (1881), p. 9; *G. Darboux*, C. R. Acad. sc. Paris 101 (1885), p. 202; *A. Mannheim*, C. R. Acad. sc. Paris 102 (1886), p. 253, 310, 353, 501; *F. Klein*, Höhere Geom.[104]) 1, p. 50; *G. Salmon*, trad. *O. Chemin*, Géom. analyt à trois dimensions[61]), (2ᵉ éd.) 1, p. 240; *W. F. Meyer*, Schriften phys.-ökon. Ges. Königsberg 42 (1901), Sitzgsb. p. 24.

491) J. reine angew. Math. 12 (1834), p. 137; Werke 7, Berlin 1891, p. 7; Geom. Theoreme (œuvre posth. de *C. G. J. Jacobi* publ. par *O. Hermes*) J. reine angew. Math. 73 (1871), p. 179/206; Werke 7, p. 42/68; *O. Hermes*, J. reine angew. Math. 73 (1871), p. 209; sur la propriété de la normale à une surface définie *en supposant que le point qui décrit le plan reste dans le plan du triangle,* voir *F. Joachimsthal*, J. reine angew. Math. 73 (1871), p. 207/9; *R. Townsend* [Cambr. Dublin math. J. 3 (1848), p. 150] donne une conséquence du théorème de Mac-Cullagh[488]) [nº 78]; *H. Schröter*, Oberflächen zweiter Ordnung[105]), p. 369; *G. Darboux* [Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (1) 8 (1870/2), p 197/280] a indiqué de nombreuses conséquences; *L. F. Painvin* [Nouv. Ann. math. (2) 10 (1871), p. 481] a généralisé certains résultats, relativement aux surfaces d'ordre n; *R. Sturm*, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften 4, Leipzig et Berlin 1909, p. 447; *_Cl. Servais_, Bull. Acad. Belgique (3) 26 (1893), p. 96/8.*

A. Cayley[490]) donna la démonstration du théorème relatif à la déformation d'un tel hyperboloïde. Ce n'est pas au point de vue géométrique seulement que cette proposition présente quelque intérêt [voir, par exemple, le théorème de Brianchon nº **44**]; mais elle est aussi importante pour les applications à la mécanique[492]).

80. Recherches de Staude. *O. Staude* a introduit dans l'étude des propriétés focales un élément nouveau, dont il a fait l'emploi le plus heureux; c'est la *distance focale brisée*[493]); il désigne sous ce nom la longueur de la ligne brisée maxima ou minima qui va d'un point d'une quadrique à centre à un foyer de l'ellipse focale, en passant par un point de cette focale de la quadrique; il y a ainsi quatre distances focales brisées; pour le paraboloïde, l'ellipse focale est remplacée par une parabole focale et il y a trois distances focales brisées.

Si $r_1, r_2; r_1', r_2'$ sont les distances focales brisées relatives à une quadrique à centre, on peut écrire l'identité [voir nº **76**]

$$-a^2(a^2-d^2)(a^2-e^2)\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}+\frac{z^2}{a^2-e^2}-1\right]$$

$$=\left[a^2-\left(\frac{r_2+r_2'+r_1+r_1'-4e}{4}\right)^2\right]\left[a^2-\left(\frac{r_2+r_2'-r_1-r_1'}{4}\right)^2\right]\left[a^2-\left(\frac{r_2-r_2'-r_1+r_1'}{4}\right)^2\right]$$

et si r_1, r_2, r_3 sont les distances focales brisées dans le paraboloïde

$$-p(p-e)\left[\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{p-e}+2x-p\right]=(p-x-r_1)(p-x-r_2)(p-x-r_3)$$

la quantité qui figure dans le premier crochet de chaque identité étant le premier membre de l'équation de la surface[494]).

Si r est la distance focale, la propriété focale de la parabole dans le plan est exprimée par l'identité

$$-p\left(\frac{y^2}{p}+2x-p\right)=(p-x-r)(p-x+r).$$

492) Cf. *E. Lucas,* Nouv. Ann. math. (2) 20 (1881), p. 9; *A. Mannheim,* C. R. Acad. sc. Paris 102 (1886), p. 501. Cf. IV 6.

493) Sous la forme la plus générale, les propriétés déduites de ces identités ont été trouvées par *O. Staude*, Ber. Ges. Lpz. 34 (1882), math. p. 5; Math. Ann. 20 (1882), p. 147; elles furent ensuite partiellement établies d'une façon synthétique par *S. Finsterwalder* [Math. Ann. 26 (1886), p. 546]; *O. Staude* [id. 27 (1886), p. 254] en donne une nouvelle démonstration; une exposition détaillée se trouve dans *O. Staude*, Die Fokaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung, Leipzig 1896 et, avec quelques perfectionnements, dans *O. Staude*, Fläche zweiter Ordnung[99]) 1, p. 723/70. Sur les modèles correspondants, voir *W. von Dyck*, Katalog[149]), p. 288.

494) Ces identités furent établies par *O. Staude*, Ber. Ges. Lpz. 49 (1897), math. p. 75, 173; Math. Ann. 50 (1898), p. 398/428. *J. Sommer* [Math. Ann. 53 (1900), p. 113] a étendu la théorie de *O. Staude* à l'espace à quatre dimensions.

Les constructions par fils des quadriques au moyen des coniques focales peuvent être, grâce aux résultats de cette théorie, généralisées en remplaçant les coniques focales par deux quadriques homofocales de genres différents[494]). On déduit également de cette théorie les propriétés optiques relatives à la réflexion, découvertes par *J. Plücker*[495]).

81. Coordonnées elliptiques et coordonnées paraboliques. *Un système homofocal est défini par une surface du système; si l'une d'elles est un ellipsoïde d'axes a, b, c, l'équation d'une surface quelconque est

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0. \tag{1}$$

Si l'une d'elles est un paraboloïde, l'équation d'une surface du système est

$$\frac{y^2}{p+\lambda}+\frac{z^2}{q+\lambda}-2x-\lambda=0. \tag{2}$$

Trois surfaces qui ne correspondent pas à des valeurs de λ comprises dans un même intervalle

$$(-a^2, -b^2),\ (-b^2, -c^2),\ (-c^2, +\infty)$$

ou

$$(-\infty, -p),\ (-p, -q),\ (-q, +\infty)$$

sont réelles et se coupent en des points réels; de sorte qu'à un système de trois nombres λ_1, λ_2, λ_3 satisfaisant à ces conditions correspondent, dans le premier cas, huit points, dans le second, quatre points, symétriques deux à deux par rapport aux plans principaux du système.

Réciproquement, par un point arbitraire (x, y, z) de l'espace passent trois surfaces du système homofocal qui correspondent aux racines de l'équation (1) ou de l'équation (2); ces surfaces sont, pour l'équation (1), un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe et un hyperboloïde à deux nappes; pour l'équation (2), un paraboloïde hyperbolique et deux paraboloïdes elliptiques.*

Les racines de l'équation (1) sont appelées les *coordonnées elliptiques* du point; celles de l'équation (2) sont appelées les *coordonnées paraboliques* du point (x, y, z); *il résulte de ce qui précède que ces coordonnées ne déterminent complètement un point que si l'on précise dans quel angle il se trouve par rapport aux plans principaux du système.* Relativement à l'équation (1), on trouve, en appliquant la

495) System der Geom. des Raumes[32]), p. 334; J. reine angew. Math. 35 (1847), p. 100; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 456; *O. Staude*, Math. Ann. 27 (1886), p. 412; *S. Finsterwalder*, Sitzgsb. Akad. München 17 (1887), p. 33.

théorie de la décomposition des fractions rationnelles[496]),

$$x^2 = \frac{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)},$$

$$y^2 = \frac{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_3)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)},$$

$$z^2 = \frac{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_3)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)};$$

relativement à l'équation (2), on trouve

$$y^2 = \frac{(p+\lambda_1)(p+\lambda_3)(p+\lambda_3)}{q-p},$$

$$z^2 = \frac{(q+\lambda_1)(q+\lambda_2)(q+\lambda_3)}{p-q},$$

$$x = -\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+p+q}{2}.$$

**C. G. J. Jacobi* les exprime en fonction de deux angles, en considérant uniquement les points d'un ellipsoïde*, *Ch. Dupin* mentionne surtout les coordonnées des lignes de courbure; ce fut *G. Lamé*[497]) qui le premier attira l'attention sur la notion de coordonnées elliptiques d'un point quelconque de l'espace; plus tard, *C. G. J. Jacobi*[498]) les utilisa comme variables de substitution pour intégrer les équations différentielles des lignes géodésiques de l'ellipsoïde et de la représentation cartographique de l'ellipsoïde. L'usage de ces coordonnées est un procédé tout naturel pour l'étude du système focal et des propriétés focales[499]); *elles s'introduisent également dans des questions de mécanique.*

L'équation du troisième degré qui définit les coordonnés elliptiques d'un point est la résolvante de l'équation biquadratique relative aux distances brisées de *O. Staude*[500]).

496) *G. Lamé*, J. Éc. polyt. (1) cah. 23 (1834), p. 235; cf. *O. Staude*, Fläche zweiter Ordnung[99]) 1, p. 953, note 103. *Cf. *L. F. Painvin*, Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 337; *E. Pruvost*, Géom. analyt.[20]), p. 369; *B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]), p. 445; *C. A. Valson* [Nouv. Ann. math (1) 19 (1860), p. 218] s'est occupé des coordonnées paraboliques.*

497) *Ch. Dupin*, Géom.[9]), p. 20; *G. Lamé*, J. math. pures appl. (1) 2 (1837), p. 156; (1) 4 (1839), p. 134; (1) 8 (1843), p. 397.

498) J. reine angew. Math. 19 (1839), p. 309/13; J. math. pures appl. (1) 6 (1841), p. 267; Werke 2, Berlin 1882, p. 59/63.

499) *J. Liouville*, J. math. pures appl. (1) 12 (1847), p. 423; *J. Mac-Cullagh*, Works, Dublin et Londres 1880, p. 310. Pour la représentation des surfaces d'ordre supérieur au moyen des coordonnées elliptiques, voir *W. Roberts*, Ann. mat. pura appl. (1) 4 (1861), p. 143; J. reine angew. Math. 62 (1863), p. 50; *H. Durrande*, Nouv. Ann. math. (2) 4 (1865), p. 127; *E. Beltrami*, Nouv. Ann. math. (2) 4 (1865), p. 232; *O. Staude*, Diss. Leipzig 1881.

500) Ber. Ges. Lpz. 1897, math. p. 75.

Le système des coordonnées elliptiques est un cas particulier du système de *coordonnées cyclides*[501]); à un autre point de vue, *L. Schläfli*[502]) et *J. Lüroth*[503]) ont indiqué une généralisation projective de ce système[504]).

82. Tangentes communes à deux quadriques homofocales. Les droites qui portent les distances brisées [n° **80**] sont des transversales communes aux deux focales.

**M. Chasles* et *J. Mac-Cullagh*[505]) ont montré que sur les tangentes communes à deux quadriques homofocales, une troisième quadrique homofocale détermine des segments qui sont proportionnels aux carrés des diamètres de cette dernière qui sont parallèles aux tangentes communes.* *J. Mac-Cullagh* a également montré que les plans diamétraux, parallèles aux plans tangents aux trois surfaces homofocales qui passent par un point P, déterminent, sur les quatre tangentes communes issues de P à deux quadriques du système, des segments égaux aux axes majeurs de ces quadriques (ces segments sont désignés sous le nom de distances focales moyennes du point P).

M. Chasles[506]) a étudié les propriétés des géodésiques et des lignes de courbure et, en particulier, a établi que les tangentes communes à deux quadriques homofocales touchent les géodésiques, qui sont tangentes à la courbe d'intersection de ces surfaces. Sur cette propriété repose une construction, au moyen de fils, des lignes de courbure, construction indiquée par *M. Chasles*[507]), ainsi qu'une construction analogue de la quadrique, signalée par *O. Staude* [n° **80**].

R. Bricard*[508]) a montré que les faisceaux de plans tangents menés aux quadriques d'un système homofocal par deux tangentes communes à deux de ces quadriques sont *égaux.

501) *M. Bôcher* (en développant et continuant *F. Klein*), Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie, Gekrönte Preisschrift Göttingue 1891.

502) J. reine angew. Math. 43 (1852), p. 23.

503) Z. Math. Phys. 13 (1868), p. 156.

504) Voir aussi *A. Clebsch*, Geom.[105]), réd. par *F. Lindemann* 2[1], p. 290.

505) *J. Mac Cullagh*, Works, Dublin et Londres 1880, p. 303; voir *M. Chasles*, J. math. pures appl. (1) 11 (1846), p. 112; *J. Liouville*, J. math. pures appl. (1) 12 (1847), p. 423; *J. Y. Rutledge*, Cambr. Dublin math. J. 5 (1850), p. 69; *W. Roberts*, Ann. mat. pura appl. (1) 4 (1861), p. 142. Voir dans *W. von Dyck* [Katalog[149]), p. 286] la description des modèles de surfaces homofocales dressés par *R. Diesel* en 1878, *E. R. Neovius* en 1885 et *R. Haussner* en 1887.

506) J. math. pures appl. (1) 11 (1846), p. 11, 105; *Ph. Gilbert*, Nouv. Ann. math. (2) 6 (1867), p. 529; *O. Staude* [Math. Ann. 22 (1883), p. 156] indique une généralisation projective; **Cl. Servais*, Mathesis (3) 7 (1907), p. 113/22; Annaes Acad. polyt. Porto 5 (1910), p. 193/208; 6 (1911), p. 77/81.*

507) J. math pures appl. (1) 11 (1846), p. 16.

508) *Nouv. Ann. math. (4) 8 (1908), p. 23.*

G. Darboux[509]) a étendu le théorème de Poncelet relatif aux polygones inscrits et circonscrits aux coniques en considérant les polygones circonscrits à deux surfaces homofocales et ayant leurs sommets sur d'autres surfaces homofocales aux premières.*

Les équations des tangentes communes[510]) sont à variables séparées du type des différentielles hyperelliptiques.

83. Propriétés focales des lignes de courbure. Les lignes de courbure des quadriques ont été trouvées et étudiées d'abord par *G. Monge*[511]) et *Ch. Dupin*[512]); ce sont les courbes d'intersection de la surface avec les surfaces homofocales à celle-ci. Leurs propriétés focales sont ou algébriques ou transcendantes.

Aux premières appartiennent celles qui furent découvertes par *C. A. Valson*[513]) et *J. B. H. Heilermann*[514]). Les deux plans normaux principaux d'un point d'une quadrique déterminent sur les axes de symétrie de la surface une involution, dont les points doubles ont reçu le nom de *points focaux*, *ce sont les points de rencontre des axes de symétrie avec les normales aux ombilics.* La sphère décrite d'un point focal comme centre et tangente à la surface à l'ombilic correspondant est appelée une *sphère focale*; pour tout point d'une ligne de courbure, la somme ou la différence des tangentes menées aux sphères focales, dont les centres sont sur un même axe, est constante.

E. Gradhandt[515]), utilisant la théorie des distances focales brisées, a signalé d'autres propriétés focales qui correspondent à celles des foyers et des directrices des coniques.

509) *Bull. Soc. philom. Paris (6) fasc. 7 (1870), p. 92; Leçons sur la théorie générale des surfaces 2, Paris 1889, p. 303; *O. Staude*, Math. Ann. 22 (1883), p. 1, 145; *R. Bricard*, Nouv. Ann. math. (4) 8 (1908), p. 317.*

510) *M. Chasles*, J. math. pures appl. (1) 11 (1846), p. 112; *C. G. J. Jacobi*, Vorlesungen über Dynamik (1842/3), rédigées par *A. Clebsch*, Berlin 1866; Werke, Supplementband publ. par *E. Lottner*, Berlin 1884, p. 234; *O. Staude*, Math. Ann. 22 (1883), p. 156.

511) J. Éc. polyt. (1) cah. 2, an IV, p. 145 [an III]; Application de l'analyse à la géométrie, (4ᵉ éd.) Paris 1809, p. 121.

512) Géom.[9]), p. 305.

513) Applications de la théorie des coordonnées elliptiques, Paris 1854; C. R. Acad. sc. Paris 50 (1860), p. 680; Nouv. Ann. math. (1) 19 (1860), p. 298.

514) Monatsb. Akad. Berlin 1858, p. 270; Nouv. Ann. math. (1) 17 (1858), p. 342; J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 345. Voir aussi *L. Aoust*, C. R. Acad. sc. Paris 48 (1859), p. 886; *T. del Beccaro*, Ann. mat. pura appl. (1) 2 (1859), p. 30; *H. Schröter*, Oberflächen zweiter Ordnung[105]), p. 665; **L. F. Painvin*, Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 346;* voir *O. Böklen*, Z. Math. Phys. 26 (1881), p. 383; **Cl. Servais*, Annaes acad. polyt. Porto 2 (1907), p. 131/54.*

515) Diss. Rostock 1901.

Des propriétés focales s'exprimant par des relations transcendantes ont été découvertes par *C. G. J. Jacobi*[516]), *W. Roberts*[517]) et *M. Chasles*[518]).

Transformations et représentation plane.

84. Correspondance homographique entre deux quadriques. *L'étude de la correspondance homographique entre les points de deux quadriques s'est présentée d'abord dans des cas particuliers; la transformation homothétique a été un des premiers exemples que l'on ait rencontrés; la transformation par *affinité*, qui joue un rôle important dans l'étude de l'ellipsoïde, en le transformant en une sphère pai multiplication des trois coordonnées et des cotes par des facteurs constants, intervient dans la représentation de l'ellipsoïde en géométrie descriptive[519]).*

Le théorème d'Ivory est le premier exemple d'une transformation par affinité[520]); *M. Chasles*[519]) l'a utilisée dans ses recherches sur les diamètres conjugués de l'ellipsoïde; *J. V. Poncelet*[521]) a donné quelques théorèmes relatifs aux quadriques semblables; mais, c'est à *A. F. Möbius*[522]) que l'on doit la première étude systématique des conditions dans lesquelles deux quadriques peuvent se correspondre par affinité; il a montré que deux quadriques à centre de même espèce admettent toujours une telle correspondance; on peut d'ailleurs l'établir d'une infinité de façons en faisant correspondre un système quelconque de diamètres conjugués d'une quadrique à un système de diamètres conjugués de l'autre.

J. V. Poncelet[523]) et *A. F. Möbius*[524]) ont signalé quelques résultats

516) J. reine angew. Math. 12 (1834), p. 140; Werke 7, éd. Berlin 1891, p. 10.

517) Cambr. Dublin math. J. 3 (1848), p. 159.

518) C. R. Acad. sc. Paris 22 (1846), p. 107; J. math. pures appl. (1) 11 (1846), p. 15.

519) *M. Chasles*, Correspondance sur l'Éc. polyt. 3 (1814/6), p. 326; cf. *S. Glaser*, Archiv Math. Phys. (2) 14 (1896), p. 156/69; **Ch. Brisse*, Cours de géométrie descriptive 2, Paris 1891, p. 189; *J. Caron*, Cours de géométrie descriptive, Paris 1888, . 333.*

520) Cf. *O. Staude*, Fläche zweiter Ordnung[99]) 1, p. 711.

521) *J. V. Poncelet*, Propriétés projectives[41]), (1ʳᵉ éd.) p. 381; *L. I. Magnus*, Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 2, p. 362; *T. Weddle*, Cambr. Dublin math. J. 8 (1853), p. 35; *Th. Reye*, Geom. der Lage[207]), (3ᵉ éd.) 3, p. 141; trad. *O. Chemin* 2, p. 192.

522) Der baryc. Calcul[12]), p. 233; Werke 1, p. 212; indépendamment de la relation d'affinité, des propriétés métriques des diamètres conjugués sont signalées, p. 212, 215, 219; cf. *Th. Reye* [Geom. der Lage[207]) 2, p. 67; trad. *O. Chemin* 2, p. 66]; au sujet de l'affinité entre une quadrique quelconque et une surface de révolution, voir *K. Rohn* et *E. Papperitz*, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, (1ʳᵉ éd.) 2, Leipzig 1896, p. 177.

523) *J. V. Poncelet*, Propriétés projectives[41]), (1ʳᵉ éd.) p. 376

524) *L. I. Magnus*, Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 2, p. 355; cf. *K. G. Chr. von Staudt*, Beiträge[58]), fasc. 3, Nuremberg 1860, p. 294.

relatifs à la correspondance par homologie de deux quadriques *et *L. F. Painvin*[525]) a indiqué la condition générale que doivent remplir deux figures homographiques quelconques pour qu'il soit possible de les rendre homologiques; il a examiné le cas où l'une d'elles est une sphère.* *J. Plücker*[526]) a mis en évidence la correspondance homographique entre deux quadriques proprement dites; l'emploi de substitutions à coefficients imaginaires permet d'établir que deux quadriques proprement dites se correspondent homographiquement[527]).

85. Collinéations de l'espace conservant une quadrique. L'ensemble des transformations projectives qui laissent une quadrique invariante constitue un groupe, qui comprend deux séries de transformations, toutes les deux de multiplicité 6 (définies par deux systèmes distincts d'équations contenant chacun six paramètres arbitraires): les transformations *propres* qui transforment chaque système de génératrices rectilignes en lui-même; les transformations *impropres*, qui permutent les deux systèmes de génératrices rectilignes.

Les transformations propres forment un groupe à six paramètres; *c'est le plus grand groupe engendré par des transformations infinitésimales et laissant la quadrique invariante*, d'après *S. Lie*[528]); il est entièrement défini par la quadrique. Les surfaces propres du second ordre sont les seules surfaces non développables qui admettent un groupe projectif à plus de trois paramètres.

Si l'on connaît l'ensemble des transformations propres, il suffit d'avoir une transformation impropre pour en déduire toutes les transformations impropres par multiplication de toutes les premières par la transformation impropre connue.

S. Lie[528]) a déterminé les sous-groupes du groupe des transformations propres de la quadrique et *E. Study*[529]) a plus tard étudié la théorie des invariants du groupe relatif à une quadrique propre.

*Relativement aux sous-groupes, *S. Lie*[528]) a établi les deux résultats suivants: «Le groupe continu *propre* contient deux sous-groupes à trois paramètres, dont chacun laisse invariantes les génératrices d'un même système; deux transformations appartenant, l'une à un de ces sous-groupes, l'autre à l'autre sous-groupe sont échangeables.»*

*«Tout sous-groupe continu du groupe continu *propre* d'une quadrique laisse invariante au moins une génératrice, sauf dans le cas où c'est le groupe projectif le plus général (à trois paramètres) laissant invariants la quadrique et un point en dehors de la quadrique.»*

Aux transformations propres, appartient toute collinéation involutive qui laisse invariants tous les points de deux droites conjuguées (polaires réciproques) par rapport à la quadrique; aux transformations impropres, appartient toute collinéation involutive qui laisse invariants un point ainsi que tous les points de son plan polaire par rapport à la quadrique (homologie harmonique).

Si la surface dégénère en une conique, elle admet un groupe continu de collinéations de multiplicité 7. Si cette conique est l'ombilicale, le groupe est celui des transformations semblables et il admet comme sous-groupes le groupe à six paramètres du mouvement euclidien, le groupe à quatre paramètres de l'homothétie et le groupe à trois paramètres des translations euclidiennes[530]).

Si l'on prend pour surface *absolue* dans un espace non euclidien (elliptique ou hyperbolique) une quadrique correspondant à un système polaire réel, mais n'ayant pas de génératrices rectilignes réelles, les transformations propres de la surface en elle-même apparaissent comme étant les déplacements de l'espace correspondant.

86. Représentation analytique des transformations. Relativement à un système polaire réel de la surface, on peut représenter les transformations par des substitutions linéaires effectuées sur les coordonnées d'un point: aux substitutions de déterminant $+1$, correspondent les transformations propres; aux substitutions de déterminant -1, correspondent les transformations impropres.

La représentation analytique est particulièrement simple, si on donne à l'équation de la surface une des formes canoniques

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

ou

$$x_2 x_3 - x_1 x_4 = 0.$$

525) *Nouv. Ann. math. (2) 9 (1870), p. 97; Géom. analyt.[28]) 2, première partie, p. 170; 2, seconde partie, p. 189.*

526) *J. Plücker*, System der Geom. des Raumes[32]), p. 326; voir *C. G. J. Jacobi*, J. reine angew. Math. 8 (1832), p. 338; Werke 3, Berlin 1884, p. 138; *F. J. Richelot*, J. reine angew. Math. 70 (1869), p. 137.

527) *F. Klein*, Höhere Geom.[104]) 1, p. 356. Sur le complexe tétraédral de la collinéation, voir *Th. Reye*, J. reine angew. Math. 93 (1882), p. 81; *A. del Re*, Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1887), p. 290; *R. Sturm*, Liniengeometrie[196]) 1, p. 373.

528) *S. Lie* et *F. Engel*, Theorie der Transformationsgruppen 3, Leipzig 1893, p. 134, 139, 192, 198.

529) Ber. Ges. Lpz. 49 (1897), math. p. 443.

530) *S. Lie* et *F. Engel*, Transformationsgruppen[528]) 3, p. 210; *F. Klein*, Math. Ann. 4 (1871), p. 412, 622. Sur les transformations des *faisceaux de quadriques en eux-mêmes*, voir *A. Harnack*, Math. Ann. 12 (1877), p. 82; *S. Lie* et *F. Engel*, Transformationsgruppen[528]) 3, p. 205; *A. Cayley*, London Edinb. Dublin philos. mag. (4) 6 (1853), p. 326; (4) 7 (1854), p. 208; Papers 2, Cambridge 1889, p. 105; 3, Cambridge 1890, p. 133.

Sous la première forme, on a les transformations orthogonales; sous la seconde, on a des transformations projectives à une variable opérant séparément sur les paramètres des génératrices rectilignes de chaque système[531]).

A. Cayley et *G. Frobenius*[532]) ont étudié la transformation de l'équation générale

$$f = \sum \sum a_{i,k} x_i x_k = 0$$

en elle-même. L'étude synthétique de la transformation d'une quadrique en elle-même a été faite par *K. G. Chr. von Staudt*[533]) et *R. Sturm*[534]).

Les rapports entre les transformations précédentes et celles qui laissent invariant un complexe linéaire se présentent d'eux-mêmes aussi bien au point de vue synthétique qu'au point de vue analytique[535]).

*«Toute collinéation qui laisse invariant un et, par suite, une infinité de complexes linéaires (multiplicité 1), laisse invariantes une infinité de quadriques, avec invariance de chaque système de génératrices rectilignes, et est une transformation propre d'Hermite; et réciproquement.

Les quadriques invariantes forment un faisceau, qui passe par un quadrilatère gauche du tétraèdre principal de la collinéation. Les complexes linéaires forment un faisceau, dont la congruence est déterminée par les côtés du quadrilatère et a pour directrices les diagonales.*

87. Les quadriques dans la corrélation générale de l'espace. La corrélation générale de l'espace fait correspondre une surface propre du second ordre et de seconde classe à une telle surface; dans une telle corrélation, il existe en général deux quadriques invariantes; *pour chacune d'elles, chaque système de génératrices rectilignes se transforme en lui-même;* les surfaces du faisceau défini par les deux quadriques se correspondent deux à deux dans la corrélation.

531) Au sujet de la bibliographie, consulter *H. R. Baltzer*, Determ.[94]) et l'article I 11. Sur la relation de la théorie des quaternions et de la théorie des nombres complexes avec ces questions, cf. I 5; *E. Study* a signalé d'autres rapprochements [Über nicht-euklidische und Liniengeometrie, Festschrift für Prof. Limpricht, Greifswald 1900]; **B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]) 3, p. 475.*

532) *H. R. Baltzer*, Determ.[94]), p. 193; cf. *J. Rosanes*, J. reine angew. Math. 80 (1875), p. 53; *G. Frobenius*, J. reine angew. Math. 84 (1878), p. 37; *A. Voss*, Math. Ann. 13 (1878), p. 320; 26 (1886), p. 231; Sitzgsb. Akad. München 26 (1896), p. 1, 211, 273; *H. G. Zeuthen*, Math. Ann. 18 (1881), p. 33; 26 (1886), p. 247.

533) Geom. der Lage[46]), p. 199; Beiträge[58]), fasc. 1, Nuremberg 1856, p. 63.

534) Math. Ann. 26 (1886), p. 465; Liniengeometrie[195]) 1, p. 309, 374.

535) *A. Clebsch*, Geom.[105]), publ. par *F. Lindemann* 2[1], p. 357; **R. Sturm*, Liniengeometrie[195]) 1, p. 311.*

H. Schröter[536]) a étudié ces relations par voie synthétique; *A. Voss*[537]) et *F. Lindemann*[538]) en ont fait l'étude analytique; ils ont montré que la corrélation laisse invariants deux complexes linéaires et que les complexes du faisceau défini par les deux premiers se correspondent involutivement. *L. I. Magnus*[539]) a établi que deux espaces réciproques peuvent être amenés en situation polaire réciproque et *Th. Reye* a retrouvé ces résultats synthétiquement.

88. Réciprocité polaire. La figure polaire réciproque d'une quadrique propre, relativement à une quadrique propre prise comme directrice, est une surface propre du second ordre, comme l'avait remarqué *C. Livet*[540]) pour les quadriques à centre et comme l'ont montré dans le cas général *Ch. J. Brianchon*[541]), *M. Chasles*[542]) et *J. V. Poncelet*[543]). C'est dans ces recherches qu'apparut pour la première fois le *principe de dualité* relatif à l'espace; sa nature fut plus tard mise en lumière grâce aux travaux de *A. F. Möbius*, *J. Plücker*, *J. Steiner* et *M. Chasles*[544]).

Dans un grand nombre d'applications, on choisit comme quadrique directrice la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0;$$

son centre est appelé l'*origine* de la réciprocité[545]). La figure polaire réciproque d'une sphère est une surface de révolution pour laquelle l'origine est un foyer situé sur l'axe de révolution. La surface polaire réciproque d'une surface propre du second ordre par rapport à un foyer pris pour origine est une quadrique de révolution. *On peut aussi prendre comme quadrique directrice une sphère quelconque et l'on est conduit à des résultats analogues; le cas qui a été envisagé plus haut fournit une interprétation simple de l'équation tangentielle d'une quadrique.*

536) J. reine angew. Math. 77 (1874), p. 105; cf. *F. London*, Math. Ann. 38 (1891), p. 534; *R. Sturm*, Liniengeometrie[195]) 1, p. 310.

537) Math. Ann. 13 (1878), p. 355.

538) *F. Lindemann*, utilisant un manuscrit de *W. Frahm* [Habilitationsschrift Tubingue 1873], dans *A. Clebsch*, Geom.[105]), (1re éd.) 2[1], p. 401.

539) Aufgaben[27]) 2, p. 127; *Th. Reye*, J. reine angew. Math 79 (1875), p. 159.

540) Correspondance sur l'Éc. polyt. 1 (1804/8), p. 76.

541) J. Éc. polyt. (1) cah. 13 (1806), p. 297.

542) Correspondance sur l'Éc. polyt. 3 (1814/6), p. 319.

543) J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 31.

544) Pour la question historique, consulter *F. Klein*, Göttingische gelehrte Anzeigen 1872, p. 7.

545) *J. Plücker*, Analyt.-geom. Entwick.[362]) 2, p. 261; *J. V. Poncelet*, Propriétés projectives[41]), (1re éd.) p. 48; **L. F. Painvin*, Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 390; *B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]) 3, p. 294.*

Si la directrice est un cône du second ordre, il y a correspondance entre rayons et plans menés par le sommet du cône [n° **58**]. Dans le cas particulier où la directrice est le cône isotrope, à un cône correspond le cône supplémentaire. Ce mode de correspondance a été étudié par *M. Chasles*[546]).

89. Réciprocités polaires qui transforment deux quadriques l'une dans l'autre. *J. Steiner*[547]) a le premier recherché s'il existe des quadriques directrices par rapport auxquelles deux quadriques données sont polaires réciproques; plus récemment *E. d'Ovidio*[548]), *H. Thieme*[549]), *P. del Pezzo*[550]) et *E. Duporcq*[551]) ont repris l'étude de cette question; le résultat le plus important à signaler est le suivant:

Étant données deux quadriques, il existe huit directrices par rapport auxquelles ces deux quadriques sont polaires réciproques.

90. Réciprocités polaires qui transforment une quadrique F en elle-même. Soient A, A' deux points de F conjugués harmoniques relativement aux diagonales d'un quadrilatère gauche tracé sur F, et soit α le plan tangent en A. La quadrique F_1 circonscrite au quadrilatère gauche, et telle que A' et α sont pôle et plan polaire, est la quadrique directrice d'un système polaire qui conserve la quadrique F.

Si les points A et A' sont conjugués dans l'homologie harmonique (P, π), π étant le plan polaire de P par rapport à F, la quadrique F_2 circonscrite à F le long de la conique (π) et telle que A' et α sont pôle et plan polaire est la quadrique directrice d'un système polaire qui conserve la quadrique F.

Il faut d'ailleurs remarquer que la quadrique F_1 ou F_2 est sa propre polaire réciproque si l'on prend F comme quadrique directrice.

Cette théorie fut édifiée par *P. del Pezzo*[552]), *R. Sturm*[553]), *Chr. Wiener*[554]), *V. Retali*[555]).

546) Cônes[371]) [Nouv. Mém. Acad. Bruxelles 6 (1830), mém. n° 11, p. 7, 13]; J. math. pures appl. (1) 1 (1836), p. 327; *L. O. Hesse*, Analyt. Geom. des Raumes[16]), (3e éd.) p. 24.

547) J. reine angew. Math. 31 (1846), p. 90; Werke 2, Berlin 1882, p. 357.

548) Giorn. mat. (1) 10 (1872), p. 313.

549) *H. Thieme*, Z. Math. Phys. 22 (1877), p. 377.

550) Rendic. Accad. Napoli (1) 24 (1885), p. 164.

551) *Géom. moderne[362]), p. 102.*

552) Rendic. Accad. Napoli (1) 24 (1885), p. 164.

553) Math. Ann. 25 (1885), p. 236; 26 (1886), p. 480; Liniengeometrie[196]) 1, p. 316.

554) Tageblatt der 58. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Strassburg, 18/23. September 1885, éd. Strasbourg 1885.

555) Rendic. Accad. Bologna (1) 20 (1884/5), p. 21/33; cf. *A. Clebsch*, Geom.[105]), (1re éd.) 2^1, p. 413; **P. Zeemann*, Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 7 (1907), p. 26/37; *C. van Aller*, id. (2) 8 (1909), p. 116/22; *G. Magnel*, id. (2) 9 (1911), p. 330/7.

D. Montesano[556]) a montré, en outre, qu'il existe des systèmes de quadriques tels que toute surface du système est sa propre polaire réciproque relativement à une autre surface quelconque du système.

91. Transformations quadratiques d'une quadrique. Parmi les transformations quadratiques de l'espace, il convient de citer surtout l'*inversion* ou *transformation par rayons vecteurs réciproques*, *cas particulier de la correspondance entre points conjugués par rapport à une quadrique, ces points étant alignés avec un même point fixe.*

L'étude de l'inversion a donné lieu à de nombreux travaux, depuis que *J. Liouville* en eut fait ressortir l'importance; *J. W. Stubbs*[557]) avait déjà remarqué avant *J. Liouville*[558]) que la figure inverse d'une quadrique est une surface bicirculaire du quatrième ordre. **E. N. Laguerre*[559]) a fait connaître la transformation par directions réciproques qui présente la plus grande analogie avec la transformation par rayons vecteurs réciproques. Utilisant la notion de *semi-surface*, cette transformation est entièrement définie par les conditions suivantes:

Deux semi-plans réciproques se coupent sur un plan fixe (plan fondamental); deux couples de semi-plans réciproques forment un système de quatre semi-plans tangents à un semi-cône de révolution.

Parmi les résultats obtenus on peut citer celui-ci: la surface de quatrième classe qui a pour ligne double l'ombilicale est la transformée d'une semi-quadrique.*

L'inversion a de nombreuses applications dans la *géométrie de la sphère*[560]), où elle correspond à une transformation linéaire des coordonnées pentasphériques.

556) Ann. mat. pura appl. (2) 14 (1886/7), p. 131; cf. *E. Hess*, Nova Acta Acad. Leop. (Halle) 55 (1891), p. 97; *E. Study*, Ber. Ges. Lpz. 44 (1892), math. p. 135.

557) London Edinb. Dublin philos. mag. 23 (1843), p. 338.

558) J. math. pures appl. (1) 12 (1847), p. 265; *A. F. Möbius*, Abh. Ges. Lpz. math. 2 (1855), p. 529; Werke 2, Leipzig 1886, p. 243; *T. A. Hirst*, Ann. mat. pura appl. (1) 2 (1859), p. 163; *P. Serret*, Nouv. Ann. math. (2) 3 (1864), p. 251; *H. R. Baltzer*, J. reine angew. Math. 54 (1857), p. 162; *A. Cayley*, Quart. J. pure appl. math. 11 (1871), p. 283; Papers 8, Cambridge 1895, p. 67.

559) C. R. Acad. sc. Paris 92 (1881), p. 71. *Œuvres 2, Paris 1905, p. 604; *L. F. Painvin*, Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 394; *A. Quetelet*, Nouv. Mém. Acad. Bruxelles 4 (1827), p. 81; *G. Bellavitis*, Ann. delle scienze del regno Lombardo-Veneto (Padoue) 6 (1836), p. 126; *T. A. Hirst*, Proc. R. Soc. London 14 (1865), p. 92/186.*

560) *L. I. Magnus*, J. reine angew. Math. 8 (1832), p. 51; *F. Klein*, Progr. zum Eintritt in die philosophische Fakultät zu Erlangen, Erlangen 1872, p. 22;

92. Représentation d'une quadrique sur un plan. On peut représenter une quadrique propre sur un plan en faisant une projection centrale; si le centre de projection n'appartient pas à la surface il n'y a pas correspondance univoque entre les points du plan et ceux de la quadrique; à chaque point du plan correspondent deux points de la surface. Les deux systèmes de génératrices rectilignes correspondent alors aux tangentes d'une conique k du plan. *Cette conique n'est autre chose que la trace du cône circonscrit à la quadrique et dont le sommet est le centre de projection.*

Dans le cas le plus général, à une section plane de la quadrique correspond une conique C bitangente à k; *dans le cas particulier où le centre de projection est sur la surface, la conique k se réduit à un système de points et la conique C passe par ces points[561]).* Dans ce cas particulier il y a correspondance univoque entre les points de la surface et ceux du plan, autres que les traces des génératrices rectilignes passant par A (*projection stéréographique*).

La projection stéréographique de la sphère était connue des anciens[562]). Relativement à l'ellipsoïde de révolution[563]), *A. Fresnel*[564]), *J. A. M. S. P. Daviel*[565]), *J. N. P. Hachette*[566]) ont considéré son image par projection stéréographique sur un plan parallèle au plan tangent en A; *M. Chasles*[567]), *J. Steiner*[568]), *G. P. Dandelin*[569]) ont étendu ces recherches au cas d'une quadrique quelconque. Sur un tel plan de projection, toutes les sections planes ont pour projections des coniques homothétiques, *les points à l'infini de ces dernières correspondant aux points où les sections planes rencontrent les génératrices rectilignes qui passent en

Vorles. über höhere Geometrie (autographié) 1, Göttingue 1892/3; réédité Göttingue 1907, p. 89; *M. Bôcher,* Diss. (Preisschrift) Göttingue 1891, p. 7; *Th. Reye,* Synth. Geom. der Kugeln[342]), p. 241.

Pour une bibliographie plus complète, voir les articles III 1 et III 26.

561) *F. Klein,* Progr. Erlangen[560]), p. 27, 46; *F. August,* Archiv Math. Phys. (1) 59 (1876), p. 5.

562) Voir *E. Kötter,* Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 5² (1896), éd. 1901, p. 93.

563) *L. G.* (membre *anonyme* de l'Institut), Correspondance sur l'Éc. polyt. 1 (1804/8), p. 76 [1805].

564) Id. 1, p. 78 [1805].

565) Id. 1, p. 80 [1805].

566) Traité des surfaces du second degré, Paris 1807; (2e éd.) Paris 1813, p. 225; (3e éd.) Paris 1817.

567) Correspondance sur l'Éc. polyt. 3 (1814/6), p. 15; Ann. math. pures appl. 18 (1827/8), p. 305; 19 (1828/9), p. 157; Aperçu hist.[41]), (2e éd.) p. 372; J. math. pures appl. (1) 7 (1842), p. 272.

568) J reine angew. Math. 1 (1826), p. 45; Werke 1, Berlin 1881, p. 10, 73, 153.

569) Correspondance math. phys. (*A. Quetelet*) 3 (1827), p. 9.

A[570]).* *J. Plücker*[571]) a étudié analytiquement cette transformation. L'image d'une quadrique sur un plan peut servir, comme l'ont montré *M. Chasles* et *A. Cayley,* à l'étude des lignes tracées sur la surface[572]) [cf. nº **146**].

Au moyen de la projection stéréographique, *A. Cayley*[573]), *A. Clebsch*[574]) et *K. H. Schellbach*[575]) ont généralisé les problèmes d'Apollonius et de Malfatti en remplaçant les cercles par des sections planes d'une quadrique.

Faisceaux de quadriques.

93. ***Intersection de deux quadriques.*** *L. Euler*[576]) a reconnu que la projection sur un plan de l'intersection de deux quadriques est une courbe du quatrième degré et a signalé quelques particularités relatives à la courbe commune au cône et à la sphère; *G. Monge*[577]) a étudié l'intersection des cônes, des cylindres et des sphères et a reconnu que certaines lignes, telles que les lignes de courbure des quadriques, étaient des biquadratiques. *Ch. J. Brianchon*[578]) avait déjà signalé le cas de la décomposition d'une biquadratique en deux coniques, et l'existence des cônes du second degré passant par la courbe commune à deux quadriques fut reconnue par *G. Lamé*[579]) et *J. V. Poncelet*[580]).*

*La discussion des diverses particularités que peut présenter l'intersection de deux surfaces du second ordre est due à *L. F. Painvin*[581]);

570) Voir dans *J. N. P. Hachette* [Correspondance sur l'Éc. polyt. 2 (1809/13), p. 330 [1812]] un théorème correspondant pour le paraboloïde.

571) J. reine angew. Math. 34 (1847), p. 347, 360; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 423, 437.

572) *A. Cayley,* London Edinb. Dublin philos. mag. (4) 22 (1861), p. 35; Papers 5, Cambridge 1892, p. 70; *M. Chasles,* C. R. Acad. sc. Paris 53 (1861), p. 995, 1077; 54 (1862), p. 320; *L. D. H. Picquet,* Bull. Soc. math. France 22 (1894), p. 25; *E. Duporcq,* Géom. moderne[362]), p. 119; *A. Clebsch,* Geom.[105]), (1re éd.) 2¹, p. 414/32.*

573) Philos. Trans. London 142 (1852), p. 253; Papers 2, Cambridge 1889, p. 57.

574) J. reine angew. Math. 53 (1857), p. 292.

575) J. reine angew. Math. 45 (1853), p. 186.

576) *Introd.[7]) 2, p. 393, 397/8; trad. *J. B. Labey* 2, p. 398, 402/3.*

577) *Géom. descriptive[176]), (2e éd.) p. 83; J. Éc. polyt. (1) cah. 2, an IV, p. 145; Applic. analyse à géom.[178]), (5e éd.) p. 121.

578) *J. Éc. polyt. (1) cah. 13 (1806), p. 304.*

579) Examen[44]), p. 72.

580) Propriétés projectives[41]), (1re éd.) p. 395; (2e éd.) 1, p. 386.

581) *Nouv. Ann. math. (2) 7 (1868), p. 481; Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 189; *L. Lévy,* Nouv. Ann. math. (3) 10 (1891), p. 65.*

sa méthode repose sur l'étude de l'équation du quatrième degré

$$\Delta(\lambda) = 0,$$

dont dépend la détermination des cônes du second ordre du faisceau ponctuel défini par les deux quadriques.

G. Koenigs[582]) et *A. Tresse*[583]), utilisant, l'un la représentation au moyen de paramètres des génératrices rectilignes, l'autre la représentation sur un plan par projection conique, ont ramené cette étude à celle d'une quartique plane. *H. Andoyer*[584]) a repris la question en employant une méthode analogue à celle de *L. F. Painvin* et a examiné le cas où toutes les quadriques du faisceau sont des cônes tangents le long d'une génératrice, cas qui échappe aux autres méthodes. *Ch. Brisse*[585]) a traité le même problème par voie synthétique.*

94. Faisceau ponctuel de quadriques. *G. Lamé*[586]) a le premier reconnu que l'ensemble des quadriques qui passent par la courbe d'intersection de deux quadriques données dont les équations ponctuelles sont $f = 0$, $g = 0$ est représenté par l'équation

$$f + \lambda g = 0,$$

dans laquelle λ est un paramètre arbitraire; cet ensemble constitue un *faisceau ponctuel de quadriques.*

*Les quadriques données sont parfois appelées les *quadriques de base* du faisceau. Deux surfaces quelconques du faisceau peuvent être prises comme quadriques de base f, g; leur intersection est appelée la *base du faisceau.**

J. Plücker[587]) a défini un faisceau au moyen de huit points pris arbitrairement et a cherché les conditions dans lesquelles ces points sont indépendants, c'est-à-dire déterminent un faisceau; *G. Lamé*[588]) avait déjà remarqué que ces points doivent ne pas être les huit points

582) *Leçons de l'agrégation classique de math., Paris 1892, p. 3.*

583) *Nouv. Ann. math. (3) 11 (1892), p. 216.*

584) *Nouv. Ann. math. (3) 15 (1896), p. 153.*

585) Géom. descriptive[309]) 2, p. 90, 166; *Ch. A. A. Briot* et *J. C. Bouquet,* Géom. analyt.[21]), p. 698; *Cl. Servais,* Cours de géométrie analytique 2, Gand 1910 (autographié), p. 140/51.*

586) Examen[44]), p. 28, 35; *Ch. Dupin* [J. Éc. polyt. (1) cah. 14 (1808), p. 80] avait déjà donné ce résultat dans le cas où les deux quadriques sont concentriques.

587) Ann. math. pures appl. 19 (1828/9), p. 131; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 85; *L. I. Magnus,* Aufgaben aus der analyt. Geom[27]) 2, p. 284.

588) *Examen[44]), p. 29, 37.*

d'intersection de trois quadriques. *Th. Reye*[589]) déduit la notion du faisceau de quadriques de celle du faisceau des systèmes polaires de l'espace.

**Cl. Servais*[590]) a étudié géométriquement les différents faisceaux de quadriques en utilisant les imaginaires de *K. G. Chr. von Staudt* et sans recourir au principe de continuité; il en a déduit les diverses particularités relatives aux éléments communs à deux quadriques.*

95. *Faisceau tangentiel. L'étude de la développable circonscrite à deux surfaces de seconde classe a été faite par *L. F. Painvin*[591]) au moyen d'une équation identique à l'équation

$$\Delta(\lambda) = 0$$

[n° **93**]; l'existence de quatre coniques inscrites dans la développable avait été signalée par *J. V. Poncelet*[592]); ces coniques jouent ici le même rôle que les cônes d'un faisceau ponctuel.*

*L'ensemble des surfaces de seconde classe inscrites dans la développable commune circonscrite à deux quadriques constitue un faisceau tangentiel; deux quadriques quelconques du faisceau le définissent; on les appelle parfois *quadriques de base*; on peut encore définir le faisceau au moyen de huit plans tangents, sous certaines restrictions analogues à celles qui sont relatives aux huit points qui définissent un faisceau ponctuel.*

La notion de faisceau tangentiel fut développée par *J. V. Poncelet*[592]), *M. Chasles*[593]) et *J. Plücker*[594]); **M. Chasles* s'est occupé surtout du faisceau des quadriques homofocales.*

96. Le discriminant du faisceau. *G. Lamé*[595]) a donné le déterminant d'un faisceau ponctuel

$$\Delta(\lambda) = H\lambda^4 + \Theta\lambda^3 + \Phi\lambda^2 + \Theta'\lambda + H'$$

dans lequel H et H' sont les discriminants relatifs à deux quadriques de base f, g du faisceau.

L. O. Hesse[596]) a indiqué relativement aux coefficients Θ et Θ' (invariants simultanés de f et g) une série de théorèmes. En particulier,

589) Geom. der Lage[164]), (3e éd.) 3, Leipzig 1892, p. 17; trad. *O. Chemin* 2, Paris 1882, p. 163.

590) *Acad. Belgique, classe sc., Mémoires in 8°, (2) 1 (1904/6), mém. n° 2, p. 1/53.*

591) *Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 235; *G. Papelier,* Coord. tangent.[69]), p. 173.*

592) J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 39.

593) Aperçu hist.[41]), (2e éd.) p. 395.

594) Ann. math. pures appl. 19 (1828/9), p. 131.

595) Examen[44]), p. 72.

596) J. reine angew. Math. 45 (1853), p. 90; Werke, Munich 1897, p. 305.

si l'on suppose que H et H' sont différents de zéro, $\Theta' = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un tétraèdre conjugué à la surface $g = 0$ et inscrit à la surface $f = 0$ et pour qu'il existe un tétraèdre conjugué à la surface $f = 0$ et circonscrit à la surface $g = 0$; il en existe alors une triple infinité. *On dit alors que la quadrique $f = 0$ est *harmoniquement circonscrite* à la quadrique $g = 0$ et que la quadrique $g = 0$ est *harmoniquement inscrite* à la quadrique $f = 0$.*

J. Lüroth[597]) et *S. Gundelfinger*[598]) ont établi ces théorèmes analytiquement; *Th. Reye*[599]), qui a étudié synthétiquement de telles quadriques, les appelle *apolaires*; il est clair que la signification de la condition $\Theta' = 0$ est la même que celle de $\Theta = 0$ où l'on permute f et g.

Si les deux conditions
$$\Theta = 0, \quad \Theta' = 0$$
sont vérifiées simultanément, on dit que les deux quadriques f et g sont *harmoniques*[600]).

Si l'invariant Φ seul est nul, il existe, d'après *J. Lüroth*[601]) une infinité simple de tétraèdres conjugués par rapport à f et dont les arêtes sont tangentes à g et la réciproque est d'ailleurs exacte. *H. Vogt*[602]) a montré que les sommets de ces tétraèdres sont sur une courbe gauche du huitième ordre dont les points ont des coordonnées exprimables à l'aide des fonctions hyperelliptiques.

Si l'invariant
$$\Theta\Theta' - 4HH'$$
est nul, chaque système de génératrices rectilignes d'une des quadriques contient une infinité (multiplicité d'ordre 1) de triples de droites qui sont conjuguées (au sens de *K. G. Chr. von Staudt*) par rapport à l'autre surface, ainsi que l'a établi *F. Schur*[603]).

597) Z. Math. Phys. 13 (1868), p. 405.

598) Dans *L. O. Hesse*, Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 487; pour $H = 0$, $H' = 0$, ces théorèmes se modifient; *voir aussi *B. Niewenglowski*, Géom. analyt.[21]) 3, p. 435.*

599) J. reine angew. Math. 78 (1874), p. 97, 345; 79 (1875), p. 159; *K. G. Chr. von Staudt*, Halbmesser[125]), p. 46; *J. Rosanes*, Math. Ann. 23 (1884), p. 412. Cf. III 18, **37**.

600) *A. Voss*, Math. Ann. 10 (1876), p. 174; *A. Harnack*, Math. Ann. 12 (1877), p. 74; *Th. Reye*, J. reine angew. Math. 82 (1877), p. 1, 54, 173.

601) Z. Math. Phys. 13 (1868), p. 405; *A. Voss*, Math. Ann. 10 (1876), p. 170; **L. F. Painvin*, Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 435.*

602) Ann. Éc. Norm. (3) 12 (1895), p. 363.

603) Math. Ann. 18 (1881), p. 9; 21 (1883), p. 515; voir aussi *G. Bauer*, Sitzgsb. Akad. München 11 (1881), p. 241/8.

Si le discriminant de $\Delta(\lambda)$ est nul, les quadriques sont tangentes [n° **101**].

*Les conditions
$$H' = 0, \quad \Theta' = 0$$
expriment que la quadrique f est un cône dont le sommet est sur la quadrique g ou qu'elle est un système de plans.*

*Si l'on a
$$H' = 0, \quad \Theta = 0,$$
le cône f passe par trois arêtes d'un tétraèdre conjugué par rapport à g, ou encore il existe des trièdres conjugués par rapport au cône f et circonscrits à la surface g.*

*Si l'on a
$$H' = 0, \quad \Phi' = 0,$$
on peut mener par le sommet du cône f trois tangentes à la surface g et qui forment un trièdre conjugué par rapport au cône f. Dans tous les cas, il y a une infinité de trièdres jouissant des propriétés énoncées.*

Relativement à un faisceau tangentiel, il existe des invariants analogues, dont l'évanouissement exprime les mêmes relations géométriques que dans le cas du faisceau ponctuel; il n'y a de différence que pour le cas où l'une des quadriques n'est pas une quadrique propre[604]).

97. Intersection d'un faisceau ponctuel et d'un plan. Un faisceau ponctuel de quadriques détermine sur un plan un faisceau ponctuel de coniques; trois quadriques sont, en général, tangentes à ce plan; *ce sont les surfaces du faisceau qui passent par les sommets du triangle conjugué par rapport aux coniques du faisceau de coniques; en particulier, il y a dans un faisceau de quadriques trois paraboloïdes, qui sont tangents au plan de l'infini.*

L'équation tangentielle d'un faisceau ponctuel de surfaces du second ordre est
$$F + H\lambda + K\lambda^2 + G\lambda^3 = 0,$$
dans laquelle $F = 0$ et $G = 0$ sont les équations tangentielles des deux quadriques f et g de base; les plans tangents à la surface de seconde classe $H = 0$ coupent les quadriques f, g de base suivant deux coniques dont l'une est harmoniquement inscrite à l'autre[605]).

604) **L. F. Painvin*, Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 436.*

605) *S. Gundelfinger* dans *L. O. Hesse*, Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 497; *A. Cayley*, Messenger math. (2) 2 (1873), p. 137; Papers 8, Cambridge 1895,

A. Cayley[606]) a montré que le discriminant de cette équation est du huitième degré:

$$(9FG - HK)^2 - 4(3FK - H^2)(3GH - K^2);$$

les coordonnées des plans tangents à la courbe du faisceau annulent ce discriminant et les plans osculateurs à cette courbe sont définis par les équations

$$\frac{3F}{H} = \frac{H}{K} = \frac{K}{3G}.$$

Des résultats analogues s'obtiennent quand on considère un faisceau tangentiel et un point.

98. Faisceau ponctuel et droite. Un faisceau ponctuel détermine sur une droite des couples de points en involution; aux points doubles correspondent deux surfaces du faisceau tangentes à la droite.

L'équation du faisceau en coordonnées de droite est

$$\varphi + \lambda\chi + \lambda^2\psi = 0,$$

dans laquelle φ et ψ sont les premiers membres des équations des deux quadriques f, g de base. L'équation

$$\chi = 0$$

représente le complexe du second ordre, dont les droites sont divisées harmoniquement par les quadriques f, g de base[607]). Ce complexe coïncide en général avec celui qu'a étudié *G. Battaglini*[608]) et a, d'après *F. Klein*[609]), une surface tétraédrale comme surface de singularités. Sa génération, telle qu'elle est donnée ici, est due à *F. Aschieri*[610]), qui a montré, ainsi que *F. Schur*[611]), que ce complexe pouvait être défini par une infinité (multiplicité d'ordre 1) de couples de quadriques. *C. Segre* et *G. Loria*[612]) ont énuméré toutes les espèces de complexes harmoniques.

p. 550; *G. Salmon*, trad. *O. Chemin*, Géom. analyt. à trois dimensions[61]), p. 271; **E. Duporcq*, Géom. moderne[362]), p. 87.*

606) Cambr. Dubl. math. J. 5 (1850), p. 53; Papers 1, Cambridge 1889, p. 486.

607) *S. Gundelfinger* dans *L. O. Hesse*, Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 473; *A. Voss*, Math. Ann. 10 (1876), p. 171. Voir III 18, **3**.

608) Giorn. mat. (1) 6 (1868), p. 239; (1) 7 (1869), p. 55.

609) Math. Ann. 2 (1870), p. 222.

610) Giorn. mat. (1) 8 (1870), p. 35, 229.

611) Math. Ann. 21 (1883), p. 515.

612) Math. Ann. 23 (1884), p. 213. Un cas particulier du complexe corrélatif de celui-ci a été étudié par *L. F. Painvin*, Bull. sc. math. (1) 2 (1871), p. 368; Nouv. Ann. math. (2) 11 (1872), p. 49; c'est le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires; sa surface de singularités est la surface des ondes de *A. Fresnel*; voir IV 4.

L'equation

$$\chi^2 - 4\varphi\psi = 0$$

représente le complexe du quatrième ordre dont les droites rencontrent la courbe du faisceau. La congruence de droites formée par les tangentes communes à deux quadriques f, g est de quatrième ordre et de quatrième classe[613]).

99. Polarité relative à un faisceau ponctuel. Les plans polaires d'un point fixe par rapport à toutes les surfaces du faisceau forment en général un faisceau de plans [n° **7**]. Ce théorème, établi dans un cas particulier par *G. Lamé*[614]), fut établi dans toute sa généralité, par *J. Plücker*[615]) et *J. V. Poncelet*[616]).

L'axe du faisceau de plans, ainsi que les points de cet axe, sont dits *conjugués* du point fixe; les faisceaux qui correspondent à deux points sont projectifs. Les axes, conjugués de tous les points de l'espace, forment, d'après *G. Darboux*, un complexe tétraédral; ce complexe contient aussi toutes les droites dont les conjuguées (polaires réciproques) par rapport à deux quadriques f, g sont dans un même plan[617]).

Les droites conjuguées d'une même droite par rapport à toutes les quadriques du faisceau forment une série réglée dont les directrices sont les axes conjugués des points de la droite.

M. Chasles[618]) a montré que le lieu du pôle d'un plan fixe par

613) *F. Schur* [Z. Math. Phys. 25 (1880), p. 414] a étudié cette congruence dans le cas où les surfaces ont quatre génératrices communes; sur le système des complexes covariants de deux quadriques, voir *G. Pick*, Sitzgsb. Akad. Wien 100 II[a] (1891), p. 561.

614) Examen[44]), p. 35.

615) Ann. math. pures appl. 19 (1828/9), p. 137; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 88; Geom. des Raumes[32]), p. 331.

616) J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 38; voir *K. G. Chr. von Staudt*, Beiträge[58]), fasc. 3, Nuremberg 1860, p. 363.

617) *G. Darboux*, Bull. sc. math. (1) 1 (1870), p. 349; *Th. Reye*, Geom. der Lage[164]), (3[e] éd.) 2, Leipzig 1892, p. 153; 3, Leipzig 1892, p. 13; trad. *O. Chemin* 2, Paris 1882, p. 152 et suiv.; *W. Fiedler*, Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, (1[re] éd.), Leipzig 1871; (3[e] éd.) 3, Leipzig 1888, p. 585; *A. Voss*, Math. Ann. 10 (1876), p. 167; *G. Kœnigs*, Nouv. Ann. math. (3) 2 (1883), p. 267; *Cl. Servais*, Mathesis (3) 3 (1903), p. 185/92; *M. Chasles* a trouvé et *A. Cayley* a démontré par une autre méthode [J. math. pures appl. (1) 10 (1845), p. 383; Papers 1, Cambridge 1889, p. 212] que le lieu des points dont l'axe conjugué passe par un point fixe est une cubique gauche. Si les deux quadriques données sont homofocales, le complexe tétraédral constitue le complexe des axes du système homofocal [n° **61**].

618) Aperçu hist.[41]), (2[e] éd.) p. 406; *L. O. Hesse*, J. reine angew. Math. 49 (1855), p. 279; Werke, Munich 1897, p. 345; *K. G. Chr. von Staudt*, Beiträge[58]), fasc. 3, Nuremberg 1860, p. 364.

rapport aux quadriques du faisceau est, en général, une courbe gauche du troisième ordre, dont les cordes sont les axes conjugués des points du plan.

Le lieu de l'intersection d'une surface du faisceau et du plan polaire d'un point fixe par rapport à cette surface est, comme l'a remarqué *J. Plücker*[619]), une surface du troisième degré (Pampolare).

100. Points et plans fondamentaux. Un faisceau ponctuel de quadriques contient, en général, quatre cônes, qui correspondent aux quatre racines de l'équation en λ [n° **93**]; $_*$ces cônes peuvent être distincts, réels ou imaginaires; ils peuvent se réduire à un système de plans ou à un plan double; plusieurs de ces cônes peuvent être confondus[620]).* *G. Lamé*[621]) a le premier montré que la détermination des cônes d'un faisceau dépend d'une équation du quatrième degré et *J. V. Poncelet*[622]) a établi par voie synthétique l'existence de ces quatre cônes dans le cas général, $_*$en signalant d'ailleurs quelques cas particuliers; il a montré que par deux coniques qui ont deux points communs, on peut faire passer deux cônes du second degré.* Les points doubles d'un cône ou d'une quadrique dégénérée du faisceau s'appellent *points fondamentaux* du faisceau; leurs plans polaires [n° **99**] ont été appelés par *J. V. Poncelet* les plans *fondamentaux* du faisceau. Deux points fondamentaux, qui correspondent à deux racines distinctes de l'équation en λ, sont conjugués par rapport à toutes les quadriques du faisceau.

Si les quatre racines λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 sont distinctes, le faisceau a quatre points fondamentaux qui sont les sommets du tétraèdre conjugué commun à toutes les surfaces du faisceau: leurs plans sont les faces de ce tétraèdre[623]). *A. L. Cauchy*[624]), *C. G. J. Jacobi*[625]) et *J. Plücker*[626]) ont ramené la détermination de ce tétraèdre à la transformation simultanée des formes f et g en sommes de carrés.

619) *J. Steiner,* J. reine angew. Math. 53 (1857), p. 133; Werke 2, Berlin 1882, p. 652; *R. Sturm,* Flächen dritter Ordnung[175]), p. 16.

620) $_*$*L. F. Painvin,* Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 233.*

621) Examen[44]), p. 72.

622) Propriétés projectives[41]), (1re éd.) p. 395; *Th. Reye* [J. reine angew. Math. 82 (1877), p. 8] a donné une autre démonstration synthétique; *H. Schröter,* Oberflächen zweiter Ordnung[105]), p. 698.

623) *J. V. Poncelet,* Propriétés projectives[41]), (1re éd.) p. 395; *J. Plücker* System Geom. des Raumes[32]), p. 323.

624) Exercices math. 4, Paris 1829, p. 159; Œuvres (2) 9, Paris 1891, p. 194

625) J. reine angew. Math. 12 (1834), p. 1; Werke 3, Berlin 1884, p. 191.

626) System Geom. des Raumes[32]), p. 324; voir I 11.

Au faisceau ponctuel correspond le faisceau tangentiel

$$F + \mu G = 0$$

défini par les mêmes quadriques, dont les équations tangentielles sont

$$F = 0, \quad G = 0;$$

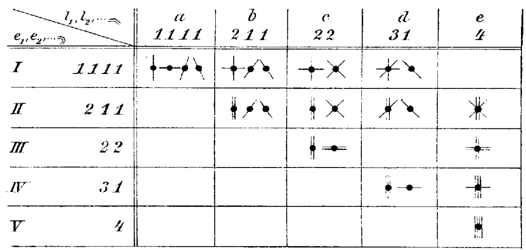
aux quatre cônes[627]) du premier faisceau (ponctuel) correspondent dualistiquement les quatre lignes de striction du second (tangentiel); chacune d'elles est située dans une face du tétraèdre conjugué commun et admet pour triangle conjugué le triangle formé par les sommets du tétraèdre situés dans son plan.

$_*$L'étude des cas de dégénérescence a été faite par *L. F. Painvin*[628]); elle est liée à celle d'une équation du quatrième degré en μ analogue à l'équation [n° **93**]

$$\Delta(\lambda) = 0;$$

à toute racine λ_i correspond une racine μ_i telle que le produit $\lambda_i \mu_i$ soit constant[629]).*

101. Classification des faisceaux ponctuels. On peut distinguer plusieurs espèces de faisceaux, suivant l'ordre de multiplicité des



racines de l'équation $\Delta(\lambda) = 0$ et les exposants des diviseurs élémentaires[630]) du déterminant $\Delta(\lambda)$. On trouve ainsi treize espèces différentes qui sont indiquées dans le tableau ci-dessus; chaque point de ce tableau correspond à une racine λ; le nombre des traits menés par un point indique l'ordre de multiplicité de la racine; le nombre des traits

627) *J. V. Poncelet,* J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 37.

628) $_*$Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 235.*

629) $_*$*G. Papelier,* Coord. tang.[69]), p. 300.*

630) $_*$*P. Muth,* Theorie und Anwendungen der Elementarteiler, Leipzig 1899.*

parallèles menés par un point est l'exposant du diviseur élémentaire correspondant[631]).

Au point de vue géométrique, on peut dire qu'à un point correspond un cône ou un système de plans ou un plan double, suivant que par ce point passent des traits ayant une seule direction, deux directions ou trois directions. Par exemple, le faisceau qui correspond à la combinaison IId contient un cône et un système de plans qui compte pour une surface triple; le faisceau qui correspond à la combinaison IIe a un plan double, qui compte pour quatre surfaces.

Dans les faisceaux I, il existe des tétraèdres conjugués communs aux quadriques:

a) un seul tétraedre;

b) une multiplicité d'ordre 1;

c) une multiplicité d'ordre 2;

d) une multiplicité d'ordre 3.

Dans tous les autres cas, il n'existe aucun tétraèdre conjugué commun aux quadriques.

Les équations canoniques de f et g sont de même forme pour les espèces qui correspondent à une même ligne du tableau; les espèces particulières aux colonnes ne se distinguent les unes des autres que par le fait que certains coefficients peuvent devenir égaux:

$$\begin{aligned}
&I.\ f\equiv \lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+\lambda_3 x_3^2+\lambda_4 x_4^2=0, && g\equiv x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0,\\
&II.\ f\equiv \lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+2\lambda_3 x_3 x_4+x_3^2=0, && g\equiv x_1^2+x_2^2+2x_3x_4=0,\\
&III.\ f\equiv x_1^2+x_3^2+2\lambda_1 x_1 x_2+2\lambda_2 x_3 x_4=0, && g\equiv 2x_1x_2+2x_3x_4=0,\\
&IV.\ f\equiv \lambda_1 x_1^2+\lambda_2(x_3^2+2x_2x_4)+2x_3x_4=0, && g\equiv x_1^2+(x_3^2+2x_2x_4)=0,\\
&V.\ f\equiv x_2^2+2x_1x_3+2\lambda_1(x_1x_4+x_2x_3)=0, && g\equiv 2x_1x_4+2x_2x_3=0.
\end{aligned}$$

La courbe du faisceau est:

Ia, une biquadratique sans point singulier;

Ib, un système de deux coniques propres ayant deux points communs;

Ic, un quadrilatère gauche,

Id, une conique propre double;

IIb une courbe gauche du quatrième ordre avec point double;

IIc, une conique propre et un système de droites concourantes, qui rencontrent la conique;

IId, deux coniques tangentes;

IIe, deux droites doubles concourantes;

IIIc, une cubique gauche et une corde de cette cubique;

631) D'après *M. Bôcher,* Diss. (Preisschrift) Göttingue 1891, p. 13; Über die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie, Leipzig 1894, p. 54.

IIIe, une droite double et deux autres droites rencontrant la première, mais non situées dans un mêne plan;

IVd, une biquadratique gauche avec point de rebroussement;

IVe, une conique et deux droites dont le point de concours est sur la conique;

Ve, une cubique gauche avec une tangente.

J. J. Sylvester[632]) a reconnu ces treize espèces et a donné les équations canoniques correspondantes, en procédant par induction; *K. G. Chr. von Staudt*[633]) est parvenu à la même classification par voie synthétique; *J. Lüroth*[634]), prenant comme point de départ les théorèmes de *L. O. Hesse* [n° **96**], avait rencontré le cas *III e*.

C'est *W. Killing*[635]) qui, appliquant la théorie des diviseurs élémentaires de *K. Weierstrass*[636]), établit complètement cette classification; *J. J. Sylvester* avait bien utilisé l'ordre de multiplicité l_i', l_i'' des facteurs linéaires $\lambda-\lambda_i$ des déterminants mineurs de $\Delta(\lambda)$, mais n'avait pas reconnu la véritable signification des différences

$$e_i=l_i-l_i',\quad e_i'=l_i'-l_i'',\ \ldots,$$

dont l'identité caractérise les différentes espèces d'une même ligne du tableau et qui explique l'identité de forme des équations canoniques.

P. Gordan[637]) a établi directement que, si f et g ont une génératrice commune (cas c et e), $\Delta(\lambda)$ est un carré parfait.

La classification précédente donne une solution du problème relatif au contact de deux quadriques, problème que *J. Plücker* avait résolu d'une façon incomplète et que précisait la connaissance des treize cas possibles signalés par *J. J. Sylvester*[638]).

632) London Edinb. Dublin philos. mag. (4) 1 (1851), p. 119; Papers 1, Cambridge 1904, p. 219.

633) Beiträge[58]), fasc. 3, Nuremberg 1860, p. 347/58; **Cl. Servais,* Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8°, 52 (1894/5), mém. n° 3, p. 1/53.*

634) Z. Math. Phys. 13 (1868), p. 404.

635) Diss. Berlin 1872; voir *S. Gundelfinger* dans *L. O. Hesse,* Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 518; à un autre point de vue, *A. Clebsch,* Geom.[105]), (1re éd.) 2¹, p. 215.

636) Monatsb. Akad. Berlin 1868, p. 316; voir *P. Muth,* Elementarteiler[630]).

637) Z. Math. Phys. 13 (1868), p. 62; *C. Bourlet*, Nouv. Ann. math. (3) 13 (1894), p. 434.

638) *J. V. Poncelet,* Propriétés projectives[41]), (1re éd.) 1, p. 381; *J. Plücker,* J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 349; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 107; *J. J. Sylvester,* London Edinb. Dublin philos. mag. (4) 1 (1851), p. 119; Papers 1, Cambridge 1904, p. 219.

102. Réalité des éléments. Si les coefficients de f et g sont réels, il y a lieu de distinguer, dans chacun des cas précédents, dans quelles conditions les points fondamentaux et les surfaces singulières du faisceau sont réels.

Ainsi le cas Ia, par exemple, donne lieu à quatre autres cas:

1°) les quatre racines de $\Delta(\lambda) = 0$ sont réelles et les quatre cônes sont réels;

2°) les quatre racines sont réelles, ainsi que les sommets des cônes mais deux cônes seulement sont réels;

3°) deux racines sont réelles et il leur correspond deux cônes réels, les deux autres cônes sont imaginaires, ainsi que leurs sommets;

4°) toutes les racines sont imaginaires, ainsi que les cônes et leurs sommets.

Cette nouvelle classification, commencée par *K. G. Chr. von Staudt*[639]), fut complètement étudiée par *R. Sturm*[640]), *L. Cremona*[641]), *L. F. Painvin*[642]) et *W. Killing*[643]): $_*$*L. F. Painvin*[644]) a d'ailleurs donné des résultats analogues pour un faisceau tangentiel.*

103. Faisceaux singuliers. Si l'équation du quatrième degré

$$\Delta(\lambda) = 0$$

est identiquement vérifiée, les quadriques constituent un *faisceau singulier*; ce sont ou des cônes ayant même sommet et ayant pour directrices les coniques d'un faisceau ponctuel plan, ou des cônes ayant une génératrice commune et même directrice; *K. G. Chr. von Staudt*[645]) et *Th. Reye*[646]) ont étudié synthétiquement ces faisceaux, que *W. Killing*[647]) a envisagés au point de vue analytique.

$_*$Parmi ces cônes, il peut y avoir des cylindres ou des systèmes de plans; l'étude du faisceau tangentiel conduit également à la considération de faisceau singulier dans le cas où l'équation en μ est une identité [n° **100**].*

639) Beiträge[58]), fasc. 3, Nuremberg 1860, p. 361.

640) Flächen dritter Ordnung[175]), p. 304.

641) J. reine angew. Math. 68 (1868), p. 124; Ann. mat. pura appl. (1) 2 (1859), p. 65, 201, où est étudiée la développable commune circonscrite à deux quadriques au moyen des coniques du faisceau tangentiel.

642) Nouv. Ann. math. (2) 7 (1868), p. 481; $_*$Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 189.*

643) *W. Killing* [Diss. Berlin 1872] étudie au point de vue de la réalité les treize cas du n° **101**.

644) $_*$Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 235.*

645) Beiträge[58]), fasc. 3, Nuremberg 1860, p. 346.

646) Geom. der Lage[164]), (3e éd.) 1, Leipzig 1886, p. 134; trad. *O. Chemin* 1, Paris 1881, p. 230.

647) Diss. Berlin 1872, p. 39; cf. n° **101**.

104. Surfaces ayant une conique commune. Les cas Ib et Id [n° **101**] étaient connus et avaient été souvent étudiés avant qu'on eût établi la classification des faisceaux ponctuels; en particulier, *J. Plücker*[648]) et *E. Bobillier*[649]) les avaient rencontrés en appliquant la „Méthode des notations abrégées".

J. N. P. Hachette[650]), *M. Chasles*[651]), *J. V. Poncelet*[652]), *J. Steiner*[653]) avaient remarqué que deux quadriques qui ont une conique commune, se coupent en général suivant une seconde conique et que par ces deux courbes passent deux cônes; *M. Chasles*[654]) fit également observer que les deux surfaces sont doublement tangentes, les points de contact étant les points communs aux deux coniques.

J. Steiner[655]) a mis en évidence le fait que deux quadriques n'ayant pas de génératrice commune ne peuvent avoir plus de deux points de contact sans se toucher le long d'une conique; l'intersection de deux quadriques peut se composer d'une conique propre et de deux droites concourantes; les surfaces sont alors tangentes en trois points; si l'intersection se compose de quatre droites, les quadriques sont tangentes en quatre points.*

Le faisceau ponctuel[656]), défini par deux coniques, intersections d'une quadrique $f = 0$ et de deux plans $U = 0$, $V = 0$, est représenté

648) Analytisch-geometrische Entwickelungen 1, Essen 1828, p. III et p. 256.

649) Ann. math. pures appl. 18 (1827/8), p. 320; $_*$*Ch. J. Brianchon*, J. Éc. polyt. (1) cah. 13 (1806), p. 394; au sujet de la priorité, voir *F. Klein*, Göttingische gelehrte Anzeigen 1872, p. 9.*

650) Correspondance sur l'Éc. polyt. 2 (1809/13), p. 243 [1811].

651) Correspondance sur l'Éc. polyt. 3 (1814/6), p. 13 (pour les cônes et les surfaces du second ordre).

652) Propriétés projectives[41]), (1re éd.) p. 380.

653) J. reine angew. Math. 1 (1826), p. 44; Werke 1, Berlin 1881, p. 9; voir *K. G. Chr. von Staudt*, Beiträge[58]), fasc. 3, Nuremberg 1860, p. 293.

654) Correspondance sur l'Éc. polyt. 3 (1814/6), p. 335; *L. I. Magnus*, Aufgaben[27]) 2, p. 350.

655) J. reine angew. Math. 1 (1826), p. 45; Werke 1, Berlin 1881, p. 9; *L. I. Magnus*, Aufgaben[27]) 2, p. 351; sur les quadriques qui ont en commun deux droites non situées dans un même plan voir *J. Steiner*, Werke 1, Berlin 1881, p. 404; *R. Sturm*, Flächen dritter Ordnung[175]), p. 260; *J. Lüroth*, Math. Ann. 13 (1878), p. 305.

656) *J. Plücker*, System der Geom. des Raumes[32]), p. 327; *L. O. Hesse*, Analyt. Geom. des Raumes[16]), (3e éd.) p. 121; *B. Amiot*, J. math. pures appl. (1) 8 (1843), p. 163; *W. Fiedler*, Z. Math. Phys. 7 (1862), p. 26.

analytiquement par l'équation

$$f + \lambda UV = 0.$$

Comme exemples de quadriques se coupant suivant deux coniques, on trouve mentionnées par *G. Lamé*[657]) les surfaces du second ordre homothétiques non concentriques; *une des coniques est alors située dans le plan de l'infini;* *L. I. Magnus*[658]) a reconnu que deux quadriques de révolution ayant un foyer principal commun se coupent suivant deux courbes planes; *ce n'est qu'un cas particulier d'un théorème dû à *G. Monge*[659]). On doit à *K. G. Chr. von Staudt*[660]) la remarque qu'une quadrique de révolution est bitangente à l'ombilicale.* Comme cas particulier des quadriques homothétiques, on peut signaler deux sphères qui se coupent suivant l'ombilicale* et suivant un cercle dont le plan est le *plan radical* de ces sphères; les cônes circonscrits communs ont pour sommets les centres de similitude de ces sphères[661]).

Si trois surfaces du second ordre passent par une même conique, les plans des trois autres coniques communes à ces surfaces prises deux à deux se coupent suivant une même droite (c'est l'axe radical dans le cas de trois sphères); si quatre quadriques passent par une même conique, les six plans des autres coniques communes à ces surfaces prises deux à deux ont un point commun[662]) (centre radical dans le cas de quatre sphères).

105. Quadriques tangentes le long d'une conique. *G. Monge*[663]) a désigné sous le nom de quadriques inscrites ou circonscrites l'une à l'autre deux quadriques qui se touchent le long d'une courbe plane; un des premiers exemples connus est celui d'une surface et d'un cône circonscrit à cette surface; deux quadriques homothétiques et concentriques, et, en particulier deux sphères concentriques, sont tangentes en tous les points de leur courbe de l'infini[664]).

Le faisceau ponctuel constitué par les quadriques circonscrites à

657) Examen[44]), p. 41; *W. Fiedler,* Z. Math. Phys. 7 (1862), p. 27.

658) *L. I. Magnus,* Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 2, p. 353.

659) Correspondance sur l'Éc. polyt. 2 (1809/13), p. 321 [1812].

660) Beiträge[58]), fasc. 1, Nuremberg 1856, p. 129.

661) Sur les centres d'homothétie de plusieurs sphères, voir *E. Kötter,* Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 5² (1896), éd. 1901, p. 89.

662) *L. I. Magnus,* Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 2, p. 347 (pour les sphères, p. 195); *W. Fiedler,* Z. Math. Phys. 7 (1862), p. 28.

663) Correspondance sur l'Éc. polyt. 2 (1809/13), p. 321 [1812].

664) *W. Fiedler,* Z. Math. Phys. 7 (1862), p. 27; **L. F. Painvin,* Géom. analyt.[28]) 2, première partie, p. 439.*

une quadrique donnée $f = 0$ le long d'une conique située dans un plan $U = 0$ a pour équation

$$f + \lambda U^2 = 0,$$

ainsi que l'ont signalé *L. I. Magnus* et *M. Chasles*[665]).

Le théorème de *G. P. Dandelin*[666]) relatif à la section plane du cône de révolution a été généralisé par *M. Chasles,* qui a montré que si deux quadriques sont inscrites l'une à l'autre; toute section de l'une d'elles par un plan tangent à l'autre en un ombilic est une conique dont cet ombilic est un foyer, *la directrice correspondante étant située dans le plan de contact des quadriques.* *J. Plücker* a établi cette proposition analytiquement.

Si au lieu de considérer un plan tangent à l'une des quadriques, on coupe les deux surfaces par un plan quelconque, les deux sections sont bitangentes, la corde de contact étant située dans le plan de contact des surfaces; on peut en particulier choisir comme plan sécant un plan de section circulaire d'une quadrique, ce qui fournit comme section une conique et un cercle bitangent[667]).

A côté de ces propositions, il convient de signaler celles qui sont relatives à des quadriques circonscrites à une même surface du second ordre. *G. Monge*[668]) a établi que deux quadriques circonscrites à une troisième se coupent suivant deux courbes planes; ces surfaces sont d'ailleurs bitangentes; *M. Chasles*[669]) a obtenu ce théorème dans le cas où les deux surfaces sont des cônes; *G. Monge*[670]) a démontré cette propriété de nouveau dans un cas particulier et a fait remarquer

665) *L. I. Magnus,* Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]), 2, p. 352; *M. Chasles,* J. math. pures appl. (1) 2 (1837), p. 308; *J. Plücker,* System der Geom. des Raumes[32]), p. 327; *W. Fiedler,* Z. Math. Phys. 7 (1862), p. 27.

666) Nouv. Mém. Acad. Bruxelles 2 (1822), p. 171; *L. I. Magnus,* Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]), 2, p. 188; *H. R. Baltzer,* Analyt. Geom.[95]), p. 97.

667) *M. Chasles,* Ann. math. pures appl. 19 (1828/9), p. 157; Aperçu hist.[41]), p. 286; *J. Plücker,* Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 428 et note 2; System der Geom. des Raumes[32]), p. 328; *J. Walker,* Cambr. Dublin. math. J. 7 (1852), p. 16; **L. F. Painvin,* Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 175; *B. Niewenglowski,* Géom. analyt.[21]) 3, p. 420; *Ch. Brisse,* Géom. descriptive[509]) 2, p. 166.*

668) Correspondance sur l'Éc. polyt. 2 (1809/13), p. 321 [1812]; 3 (1814/6), p. 299; *L. I. Magnus,* Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 2, p. 191; *M. Chasles,* Correspondance sur l'Éc. polyt. 3 (1814/6), p. 339; *J. Steiner,* J. reine angew. Math. 1 (1826), p. 44; Werke 1, Berlin 1881, p. 9; *J. Plücker,* System der Geom. des Raumes[32]), p. 327; *R. Townsend,* Cambr. Dublin math. J. 3 (1848), p. 101.

669) Correspondance sur l'Éc. polyt. 3 (1814/6), p. 14 [1814].

670) Id. 3 (1814/6), p. 302 [1816].

qu'elle était connue pour deux cylindres et utilisée pour la construction des voûtes d'arêtes; *elle permet également de conduire par une droite les plans tangents à une quadrique donnée par ses trois axes[671]).*

Les plans des courbes d'intersection de deux quadriques circonscrites à une troisième sont conjugués harmoniques par rapport aux plans de contact; *M. Chasles*[672]) les désigne sous le nom de plans de *symptose*.

106. Faisceaux tangentiels spéciaux. *Les quadriques ayant deux coniques dégénérées communes, ou de raccordement le long de deux génératrices, déterminent un faisceau à la fois ponctuel et tangentiel[673]).*

Il en est de même des quadriques ayant en commun deux coniques, ou ayant un contact planaire.

Se plaçant au point de vue tangentiel, on peut considérer deux quadriques homothétiques et, en particulier, deux sphères, comme circonscrites à une surface singulière de seconde classe située dans le plan de l'infini. On peut généraliser le *problème d'Apollonius* relatif aux sphères tangentes à quatre sphères; le problème nouveau est celui de trouver une quadrique inscrite à une quadrique $f=0$ et tangente à quatre autres quadriques données inscrites elles-mêmes dans la quadrique $f=0$; ce problème admet 128 solutions[674]).

107. Quadriques de base particulières. *Si les quadriques de base sont concentriques, toutes les quadriques du faisceau ponctuel ont même centre* et le tétraèdre conjugué commun conduit à un système de diamètres conjugués communs (qui peuvent ne pas être réels), dont la recherche a fait l'objet de travaux de *G. Monge* et de *M. Chasles*[675]).

---

671) *Ch. Brisse,* Géom. descriptive[309]) 2, p. 121; *J. Caron,* Cours de géométrie descriptive, Paris 1888, p. 171.*

672) Aperçu hist.[41]), p. 372; voir *J. Cardinaal,* Nieuw Archief voor Wiskunde 10 (1883), p. 113; *W. Fiedler,* Z. Math. Phys. 7 (1862), p. 27.

673) *L. F. Painvin,* Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 289.*

674) *M. Chasles,* Rapport sur les progrès de la géométrie, Paris 1870, p. 35; *E. Kötter,* Jahresb. deutsch. Math. Ver. 5^2 (1896), éd. 1901, p. 109; *J. Steiner,* [J. reine angew. Math. 1 (1826), p. 163; Werke 1, Berlin 1881, p. 21] étudie, au lieu du problème du contact, celui de la section sous un angle donné. Sur le problème de Malfatti relatif aux sphères, voir *J. Steiner,* J. reine angew. Math. 1 (1826), p. 184; Werke 1, Berlin 1881, p. 40; *Fr. G. Affolter,* Archiv Math. Phys. (1) 57 (1875), p. 1; sur les systèmes de sphères, voir *K. Th. Vahlen,* Z. Math. Phys. 41 (1896), p. 153.

675) *L. F. Painvin,* Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 163.*

Si l'une des quadriques est une sphère, ce système n'est autre chose que le système des axes des autres quadriques [n° **24**]. Si l'une des quadriques de base est une sphère et l'autre une surface de révolution concentrique à la sphère, le faisceau est formé de surfaces de révolution qui ont en commun une infinité simple de systèmes d'axes: *l'un des axes est l'axe de révolution, les deux autres sont deux droites rectangulaires quelconques menées par le centre perpendiculairement à l'axe de révolution* [cas $I\,b$ ($1\,ab$)]. Si les quadriques de base sont homothétiques et concentriques, il en est de même de toutes les surfaces du faisceau, et tout système de diamètres conjugués de l'une d'elles appartient à toutes les autres [cas $I\,d$].

Si les quadriques de base ont un centre, mais ne sont pas concentriques, le faisceau ponctuel est formé de quadriques qui ont en général un système commun de trois directions conjuguées; ce système est celui des directions principales si une quadrique du faisceau est une sphère; si les sections de deux quadriques par un plan diamétral du système commun, sont homothétiques, il en est de même pour les sections de toutes les surfaces du faisceau, qui ont alors une infinité de directions conjuguées communes, l'une d'elles étant toujours fixe[675]).

Le faisceau défini par deux sphères (cas $I\,b$, ou $II\,c$ si les sphères sont tangentes) contient un système (à compter deux fois) de deux plans: le plan radical des deux sphères et le plan de l'infini; il contient aussi deux cônes isotropes à ne compter chacun qu'une fois); *ceci n'est d'ailleurs qu'un cas particulier du faisceau défini par deux surfaces homothétiques.*

Parmi les faisceaux tangentiels, il en est un particulièrement remarquable, c'est celui où l'une des quadriques de base est l'ombilicale considérée comme surface singulière de seconde classe; un tel faisceau est formé de quadriques homofocales.

Si $F(u, v, w)=0$ est l'équation tangentielle cartésienne d'une quadrique, l'équation[676])

$$F+\lambda(u^2+v^2+w^2)=0$$

représente toutes les surfaces *homofocales*[677]) à F.

---

676) *J. Plücker,* System Geom. des Raumes[32]), p. 331; *L. O. Hesse,* Analyt. Geom. des Raumes[16]), p. 341; *W. Fiedler,* Z. Math. Phys. 7 (1862), p. 37; *L. F. Painvin,* Géom. analyt.[28]) 2, seconde partie, p. 350; *B. Niewenglowski,* Géom. analyt.[21]) 3, p. 444; *G. Papelier,* Coord. tangent.[69]), p. 318.*

677) Sur le système réciproque des surfaces homofocales, voir *J. Mac Cullagh,* Works, Dublin et Londres 1880, p. 316; *O. Hermes,* Diss. Breslau 1849; *L. Cremona,* Ann. mat. pura appl. (1) 3 (1860), p. 264; *W. Fiedler,* Z. Math. Phys. 7 (1862),

108. Les quadriques et les complexes linéaires. Si l'on considère une quadrique

$$f = \sum_{(i,k=1,2,3,4)} a_{ik} x_i x_k = 0 \qquad (\text{où } a_{ik} = a_{ki})$$

et un complexe linéaire

$$g = \sum_{(i,k=1,2,3,4)} b_{ik} x_i y_k = 0 \qquad (\text{où } b_{ik} = -b_{ki}),$$

il existe, en général, ainsi que l'ont montré *W. Frahm* et *F. Lindemann*[678]), quatre points fondamentaux, auxquels correspondent les mêmes plans, soit dans le système polaire de la surface soit dans le complexe; ceci est tout à fait analogue à ce qui se passe relativement à deux quadriques (100). La détermination de ces points dépend d'une équation du quatrième degré:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda a_{ik} + b_{ik}| = A\lambda^4 + C\lambda^2 + B^2 = 0,$$

où

$$A = |a_{ik}| \quad \text{et} \quad B = b_{23} b_{14} + b_{31} b_{24} + b_{12} b_{34};$$

la condition $C = 0$ exprime que le complexe donné est en involution avec celui que l'on en déduit par polarité relativement à la quadrique. Les quatre points $1, 2, 3, 4$ sont sommets d'un tétraèdre dont les faces sont tangentes à la surface f, les points de contact étant les sommets eux-mêmes (quatre arêtes forment un quadrilatère gauche et sont génératrices rectilignes de la surface); les arêtes 13, 32, 24, 41 font aussi partie du complexe; les deux autres arêtes sont polaires réciproques relativement à la surface et au complexe[679]).

Les équations canoniques de f et g par rapport à ce tétraèdre sont, lorsque l'équation $A(\lambda) = 0$ a ses racines $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2$ distinctes,

$$f = x_2 x_3 + x_1 x_4 = 0, \qquad g = \lambda_1 p_{23} + \lambda_2 p_{14} = 0.$$

W. Frahm a examiné en partie les autres cas, qui ont tous été l'objet des travaux de *F. Lindemann*[680]).

p. 42, 307. Sur les rapports entre les surfaces homofocales et les surfaces anallagmatiques, voir *E. N. Laguerre*, Bull. Soc. philom. Paris (6) fasc. 5 (1868), p. 257; *Œuvres 2, Paris 1905, p. 41.* *G. Salmon*, trad. par *O. Chemin*, Traité de géométrie analytique à trois dimensions (1re éd.) 1, Paris 1882, p. 38, 78, 100; *W. F. Meyer*, Archiv Math. Phys. (3) 5 (1903), p. 168.

678) *W. Frahm*, Habilitationsschrift, Tubingue 1873; *F. Lindemann*, Diss. Erlangen 1873; Math. Ann. 7 (1874), p. 56; cf. *A. Clebsch*, Geom.[105]), (1re éd.) 2^1, p. 343; *A. Voss*, Math. Ann. 10 (1876), p. 185.

679) Consulter *R. Sturm*, Liniengeometrie[195]) 1, p. 84, 101.

680) *A. Clebsch*, Geom.[105]), (1re éd.) 2^1, p. 343.

L'expression

$$J = \frac{C^2}{4AB^2}$$

est un invariant simultané absolu[681]); l'expression

$$\frac{B^2}{(b_{14}^2 + b_{24}^2 + b_{34}^2)^2}$$

est un invariant simultané absolu du complexe et de l'ombilicale.

Les cubiques gauches.

109. Aperçu général. *Une courbe gauche algébrique est définie comme l'intersection de deux surfaces algébriques ou comme une partie de cette intersection; son *degré* est le nombre fixe des points d'intersection de la courbe avec un plan quelconque; sa *classe* est le nombre fixe de plans osculateurs qu'on peut lui mener par un point quelconque; son *rang* est le nombre de tangentes qui rencontrent une droite donnée. La classification des courbes gauches a été faite par *G. H. Halphen*; mais, déjà, avant lui, on connaissait quelques-uns des résultats auxquels il est parvenu; on savait qu'il existe une seule famille de cubiques, deux familles de quartiques[682]). La perspective d'une cubique gauche sur un plan est une courbe plane d'ordre trois et de genre nul, dont l'étude a une très grande importance pour l'étude de la courbe gauche [n° **111**].*

C'est *A. F. Möbius*[683]) qui a le premier étudié la cubique gauche; il a montré en particulier qu'elle est la courbe gauche indécomposable de moindre degré; qu'elle est unicursale et que ses coordonnées tétraédriques sont des fonctions entières homogènes du troisième degré d'un paramètre t (*A. F. Möbius* employait le système des coordonnées barycentriques); il a établi également qu'elle est une partie de l'intersection de deux cônes du second degré ayant une génératrice commune et que la droite d'intersection d'un plan osculateur variable avec un plan osculateur fixe enveloppe une conique (conique inscrite dans la développable dont la cubique est l'arête de rebroussement).

681) *J. Rosanes* [Math. Ann. 23 (1884), p. 416] signale un invariant, dont l'évanouissement exprime qu'un système de cinq droites conjuguées (au sens de *K. G. Chr. von Staudt*) par rapport à g, appartient à f.

682) *A. Cayley*, J. math. pures appl. (1) 9 (1844), p. 285; Papers 1, Cambridge 1889, p. 183; *G. Salmon*, trad. *O. Chemin*, Geom. analyt. à trois dimensions[677]), (1re éd.) 2, Paris 1891, p. 104; trad. *W. Fiedler*, (3e éd.) 2, Leipzig 1880, p. 116; *G. H. Halphen*, J. Éc. polyt. (1) cah. 52 (1882), p. 11.*

683) Baryc. Calcul 1832, p 114, 116, 120; Werke 1, Leipzig 1885, p. 117, 118, 121; **Ch. A. A. Briot* et *J. C. Bouquet*, Géom. analyt.[21]), p. 712.*

F. Seydewitz[684]) étudia synthétiquement la courbe au moyen de sa génération projective et en déduisit une classification des cubiques gauches au moyen de leurs points à l'infini, et *H. Schröter*[685]) reconnut le caractère dualistique de ces courbes. *M. Chasles*[686]) donna, sans démonstration, un résumé de leurs propriétés les plus importantes.

Avec *K. G. Chr. von Staudt*, *R. Sturm*, *H. Schröter* et *Th. Reye*[687]) la théorie synthétique fut poussée plus avant et *L. Cremona*[688]) établit analytiquement les théorèmes énoncés par *M. Chasles* et les compléta.

110. Éléments d'une cubique. On appelle *corde* (bisécante) d'une cubique une droite qui passe par deux points de la courbe; suivant que les deux points sont réels ou imaginaires, on dit que la corde est *propre* ou impropre; *les deux points peuvent être confondus et la corde devient une *tangente*; une droite ne peut d'ailleurs pas avoir trois points communs avec une cubique gauche.*

Une droite qui ne rencontre la cubique qu'en un point est appelée une *transversale* (sécante). A une corde et à une transversale correspondent par dualité un *axe* (droite située dans *deux* plans osculateurs) et un *semi-axe*, droite située dans *un* plan osculateur; les *deux* plans osculateurs peuvent être confondus et l'axe devient une *tangente*. Une droite passant par un point de la courbe et située dans le plan osculateur est en même temps une transversale et un semi-axe[689]).

684) Archiv Math. Phys. (1) 10 (1847), p. 203.

685) J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 27/43.

686) C. R. Acad. sc. Paris 45 (1857), p. 189; J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 397; quelques indications figurent déjà Aperçu hist.[41]), (1re éd.) Bruxelles 1837, p. 250, 403.

687) *K. G. Chr. von Staudt*, Beiträge[58]), fasc. 3, Leipzig 1860, p. 299; *R. Sturm*, J. reine angew. Math. 79 (1875), p. 99; 80 (1875), p. 128; 86 (1879), p. 116; Math. Ann. 26 (1886), p. 465; *H. Schröter*, J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 27/43; Oberflächen zweiter Ordnung[105]), p. 227; *Th. Reye*, Geom. der Lage[164]), (2e éd.) 2, Hanovre 1880, p. 188; trad. *O. Chemin* 2, Paris 1882, p. 96; *Cl. Servais*, Mém. couronnés et autres Mém. Acad. Belgique in 8°, 49 (1896), mém. n° 3, p. 30/64; 52 (1894/5), mém. n° 2, p. 1/11; Acad. Belgique, classe sc., mém. in 8°, (2) 1 (1904/6), mém. n° 2, p. 44/53; id. mém. n° 4, p. 12/23.*

688) Ann. mat. pura appl. (1) 1 (1858), p. 264, 278; (1) 2 (1859), p. 19; (1) 5 (1863), p. 227; Memorie Ist. Bologna (2) 3 (1863), p. 385; J. reine angew. Math. 58 (1861), p. 138; 60 (1862), p. 188; 63 (1864), p. 141; Nouv. Ann. math. (2) 1 (1862), p. 287, 366; voir *C. A. Drach*, Einleitung in die Theorie der kubischen Kegelschnitte, Leipzig 1867; **Cl. Servais*, Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8°, 49 (1896), mém. n° 3, p. 41/6.*

689) *Th. Reye*, Geom. der Lage[687]) 2, p. 219; trad. *O. Chemin* 2, p. 100; voir aussi *W. F. Meyer*, Apolarität und rationale Kurven, Tubingue 1883, p. 47.

Une cubique gauche propre est du troisième ordre, de troisième classe[690]) et de rang quatre, ainsi que l'a montré *M. Chasles*[691]).

Les tangentes à une cubique forment une surface réglée du quatrième ordre, dont *A. Cayley*[692]) a donné l'équation; *R. Sturm*[693]) a démontré que c'est la seule surface développable du quatrième ordre. Les tangentes appartiennent à un complexe linéaire et à une infinité de complexes tétraédraux[693]).

D'après *A. Voss*, quatre droites données arbitrairement ne sont pas en général tangentes à une même cubique gauche: les droites qui, associées à trois droites données, peuvent constituer avec celles-ci un ensemble de quatre tangentes à une même cubique gauche (non donnée) appartiennent à un complexe du quatrième degré[694]).

F. Joachimsthal et *L. Cremona* ont recherché dans quels cas les points communs à une cubique et à un plan ou les plans osculateurs issus d'un point étaient réels[695]).

111. Le complexe des transversales. Les transversales d'une cubique forment un complexe du troisième degré; le cône du complexe relatif à un point P admet une génératrice double[696]); *L. Cremona* a montré que cette génératrice est isolée ou à plans tangents réels distincts, suivant que le nombre des plans osculateurs réels issus de P est trois ou un; elle est à plan tangent unique, si P est sur une tangente à la courbe[697]). La section de ce cône par un plan fournit une perspective

690) *H. Schröter*, J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 27; *K. G. Chr. von Staudt* [Beiträge[58]), fasc. 3, Nuremberg 1860, p. 319] regarde la cubique gauche, l'ensemble des plans osculateurs et l'ensemble des tangentes comme des *systèmes élémentaires*.

691) Aperçu hist.[41]), p. 406. Voir *A. Cayley*, J. math. pures appl. (1) 10 (1845), p. 245; *G. Salmon*, Cambr. Dubl. math. J. 5 (1850), p. 38; *H. A. Schwarz*, J. reine angew. Math. 64 (1865), p. 4; Math. Abh. 2, Berlin 1898, p. 11; *L. Cremona* [Ann. mat. pura appl. (1) 1 (1858), p. 278] a donné d'autres théorèmes sur les tangentes.

692) Cambr. Dublin math. J. 5 (1850), p. 153; Papers 1, Cambridge 1889, p. 500; *L. Cremona*, Ann. mat. pura appl. (1) 1 (1858), p. 164.

693) Liniengeometrie[195]) 1, p. 55, 819, 336.

694) *A. Voss*, Math. Ann. 13 (1878), p. 169; *H. Schubert*, Math. Ann. 15 (1879), p. 529.

695) *F. Joachimsthal*, J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 45; *L. Cremona*, Ann. mat. pura appl. (1) 2 (1859), p. 25; J. reine angew. Math. 58 (1861), p. 146; cf. *K. G. Chr. von Staudt*, Beiträge[58]), fasc. 3, Nuremberg 1860, p. 381.

696) *M. Chasles*, Aperçu hist.[41]), p. 251; J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 399, 401, 406, 407; C. R. Acad. sc. Paris 45 (1857), p. 189.

697) *L. Cremona*, Ann. mat. pura appl. (1) 1 (1858), p. 167, 290; cf. *A. Clebsch*, Geom.[105]) 2^1 (1891), p. 244; **Cl. Servais*, Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8°, 49 (1896), mém. n° 3, p. 42/6 [1894].*

de la cubique gauche et on peut ainsi des propriétés d'une cubique plane avec un point double déduire celles de la courbe gauche ou inversement.

L'ensemble des semi-axes (droites situées dans un plan osculateur) forme aussi un complexe du troisième degré.

112. La congruence des cordes. Les cordes d'une cubique gauche forment une congruence d'ordre un et de classe trois; il en résulte[698]), qu'une telle courbe a un *point double apparent*, quel que soit le centre perspectif.

La cubique gauche est le lieu des points singuliers de la congruence qui, d'après *R. Sturm*[699]), n'a pas de surface focale.

R. Sturm a également établi que les cordes qui appartiennent à un complexe linéaire forment une surface réglée du quatrième ordre[700]).

L'ensemble des axes d'une cubique gauche forme une congruence de classe *un* et d'ordre *trois*.

113. Quadriques passant par une cubique gauche. *M. Chasles*[701]) a montré qu'une cubique gauche a six points communs avec une quadrique; si elle a un septième point situé sur la quadrique, elle est tout entière sur cette surface.

Les surfaces du second ordre qui passent par une cubique gauche donnée forment un réseau ponctuel[702]), dont les surfaces impropres sont des cônes, ayant pour génératrices des cordes de la cubique gauche, et la cubique est le lieu de leurs sommets. Les cordes de la courbe sont des génératrices rectilignes des surfaces du réseau.

698) *A. Cayley*, J. math. pures appl. (1) 10 (1845), p. 250; Papers 1 (1889), p. 207; *M. Chasles*, J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 399; *K. G. Chr. von Staudt*, Beiträge[58]), fasc. 3, Nuremberg 1860, p. 309; *G. H. Halphen*, Bull. Soc. math. France 1 (1872/3), p. 114/7.

*Pour la notion de *puissance* d'un point relativement à une cubique gauche, voir *M. Stuyvaert*, Mém. Soc. sc. Liége (3) 7 (1907), mém. nº 2, p. 82/5.*

699) Mitt. math. Ges. Hamburg 2 (1890), éd. Leipzig 1891 (Festschrift), p. 61.

700) *R. Sturm*, Liniengeometrie[195]) 1, Leipzig 1892, p. 85; 2, Leipzig 1893, p. 35. Sur la génération étudiée antérieurement de la surface du quatrième degré par des cordes, voir *M. Chasles*, J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 405; *L. Cremona*, Ann. mat. pura appl. (1) 1 (1858), p. 295; *Th. Reye*, Mitt. math. Ges. Hamburg 2 (1890), éd. Leipzig 1891 (Festschrift), p. 46; *A. Clebsch*, Math. Ann. 2 (1870), p. 1; **M. Stuyvaert*[698]), p. 145/54.*

701) J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 400; *K. G. Chr. von Staudt*, Beiträge[58]), fasc. 3, Nuremberg 1860, p. 308; *sur l'intersection d'une cubique et d'un cône, voir *L. Cremona*, Ann. mat. pura appl. (1) 1 (1858), p. 294.*

702) *M. Chasles*, J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 401; *Th. Reye*, Ann. mat. pura appl. (2) 2 (1868/9), p. 130.

Les surfaces de seconde classe, enveloppes de tous les plans osculateurs d'une cubique gauche donnée forment un réseau tangentiel, dont les surfaces impropres sont des coniques inscrites dans la développable; dans chaque plan osculateur de la cubique gauche se trouve une de ces coniques [nº **109**], enveloppe de tous les axes de la cubique situés dans ce plan[703]).

La cubique a pour perspective relativement à un de ses points une conique[704]) et est, avec une quelconque de ses cordes, l'intersection des deux cônes du second degré[705]) qui projettent la courbe des extrémités de la corde.

Les quadriques propres du réseau sont des surfaces réglées, dont un système de génératrices rectilignes est formé de cordes, l'autre étant formé de transversales. L'intersection complète de deux surfaces quelconques du réseau se compose de la cubique et d'une de ses cordes ou d'une de ses tangentes[706]) [cf. nº **101**, cas IIIc et cas Ve].

Réciproquement, une cubique et une de ses cordes ou une de ses tangentes constituent la base d'un faisceau de quadriques, qui fait partie du réseau. Les génératrices rectilignes d'une quadrique du faisceau, qui sont du système de cette corde ou de cette tangente, sont des cordes de la cubique; les autres en sont des transversales[707]).

Deux cubiques gauches situées sur une même quadrique sont dites de même espèce si leurs cordes sont génératrices d'un même système de la surface; elles se coupent en quatre points; par contre deux cubiques d'espèces différentes ont cinq points communs[708]).

703) *A. F. Möbius*, Baryc. Calcul[12]), p. 120; Werke 1, p. 121; *L. Cremona*, Ann. mat. pura appl. (1) 1 (1858), p. 172; *H. Schröter*, J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 28; la dénomination est due à *H. Schröter*, Math. Ann. 25 (1885), p. 293.

704) *M. Chasles*, J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 397; Aperçu hist.[41]), p. 403; *A. Cayley*, London Edinb. Dublin philos. mag. (4) 12 (1856), p. 20; Papers 3, Cambridge 1890, p. 219; *K. G. Chr. von Staudt* [Beiträge[58]), fasc. 3, Nuremberg 1860, p. 500] a montré que tous ces cônes se correspondent homographiquement.

705) *J. N. P. Hachette*, Correspondance sur l'Éc. polyt. 1 (1804/8), p. 371 [1808]; *A. F. Möbius*, Baryc. Calcul[12]), p. 117; Werke 1, p. 119; J. reine angew. Math. 26 (1843), p. 151; Werke, p. 76.

706) *M. Chasles*, J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 402; *L. Cremona*, Ann. mat. pura appl. (1) 1 (1858), p. 282.

707) *M. Chasles*, J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 400/2; *L. Cremona*, Ann. mat. pura appl. (1) 1 (1858), p. 280; d'après *G. G. Chr. von Staudt*, Beiträge[58]), fasc. 3, Nuremberg 1860, p. 306, il y a correspondance homographique entre les points de la cubique et les génératrices de la quadrique qui sont transversales.

708) *M. Chasles*, J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 402; *L. Cremona*, Ann. mat. pura appl. (1) 1 (1858), p. 284; *K. G. Chr. von Staudt*, Beiträge[58]) 3.

M. Chasles a posé le problème de l'intersection de deux cubiques de même espèce tracées sur un hyperboloïde; *H. Müller* en a donné la solution.*

114. Polarité relative à une cubique. La théorie de la réciprocité polaire par rapport à une cubique gauche fut imaginée par *M. Chasles*[709]); *elle fait ressortir l'analogie qui existe entre les coniques et les cubiques gauches, analogie qui résulte à un autre point de vue de leur mode de génération.*

Cette théorie repose sur les propriétés suivantes: les points de contact des trois plans osculateurs menés d'un point P sont dans un plan qui passe par P; les plans osculateurs en trois points se coupent dans le plan déterminé par ces points. Le plan est appelé le *plan polaire* du point P, qui est dit le *pôle* du plan; le pôle et le plan polaire se correspondent dans une réciprocité involutive et sont unis.

H. Schröter[710]) montra que la relation entre pôle et plan polaire est celle qui est définie par le *système focal*, que *A. F. Möbius*[711]) avait trouvée indépendamment des cubiques gauches comme corrélation involutive et que *M. Chasles* a étudiée à un autre point de vue*. Le système focal apparaît dans *J. Plücker*[712]), où il résulte de la correspondance entre point et plan dans un complexe linéaire. D'après *K. G. Chr. von Staudt*[713]), à un système focal donné appartiennent une

Nuremberg 1860, p. 310; *A. Cayley*, Messenger math. (2) 14 (1884/5), p. 129; Papers 12, Cambridge 1897, p. 307; **H. Müller*, Math. Ann. 1 (1869), p. 407/23; **Cl. Servais*, Acad. Belgique classe sc., Mém. in — 8°, (2) 1 (1904/6), mém. n° 2, p. 7.*

709) J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 404; cf. *L. Cremona*, Ann. mat. pura appl. (1) 2 (1859), p. 19; J. reine angew. Math. 58 (1861), p. 148; **Cl. Servais*, Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique 52 (1894/5), mém. n° 2, p. 3/11.* **M. Stuyvaert*, Acad. Belgique, Bull. classe sc. 2 (1900), p. 87/98; 9 (1907), p. 515/37.*

710) J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 43.

711) J. reine angew. Math. 10 (1833), p. 317; Werke 1, Leipzig 1885, p. 489; 3, Leipzig 1886, p. 119; *L. I. Magnus*, Aufgaben aus der analyt. Geom.[37]) 2, p. 139; *M. Chasles* [J. math. pures appl. (1) 4 (1839), p. 348] construit le système focal par l'intermédiaire des génératrices rectilignes d'un hyperboloïde; cf. *K. G. Chr. von Staudt*, Geom. der Lage[46]), p. 191; Beiträge[58]), fasc. 3, Nuremberg 1860, p. 58.

712) Philos. Trans. London 155 (1865), p. 725; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 481; cf. III 26.

713) Beiträge[58]), fasc. 3, Nuremberg 1860, p. 313; voir aussi sur la relation entre les cubiques gauches et les complexes linéaires, *A. Voss* [Math. Ann. 13 (1878), p. 232], *R. Sturm* [J. reine angew. Math. 86 (1879), p. 116; Liniengeometrie[195]) 1, p. 325]; **A. Cantone*, Giorn. mat. (1) 25 (1887), p. 42/4, 182; *M. Stuyvaert*, Mém. Soc. sc. Liége (3) 7 (1907), mém. n° 2, p. 145/54.*

infinité de cubiques gauches (multiplicité d'ordre 7), qui permettent de le définir. **P. Appell*[714]) a démontré les propriétés polaires de la cubique gauche en établissant une correspondance involutive entre trois couples de points de la courbe.*

**Cl. Servais*[715]) a étudié les cubiques gauches et le système focal en se plaçant à un point de vue analogue à celui de *K. G. Chr. von Staudt*.*

115. Tétraèdre osculateur. Étant donnés deux points P_1, P_2 sur une cubique gauche, on appelle tétraèdre osculateur relatif à ces points le tétraèdre dont les faces sont les plans osculateurs en P_1 et P_2 et les plans menés par chacun de ces points et la tangente à la courbe en l'autre point.

Relativement à un tel tétraèdre, les coordonnées ponctuelles, tangentielles, plückériennes d'un point de la courbe sont respectivement:

$$t^3,\ t^2,\ t,\ 1,$$
$$1,\ -3t,\ 3t^2,\ -t^3,$$
$$t^2,\ -2t^3,\ t^4,\ 3t^2,\ 2t,\ 1.$$

La considération de ce tétraèdre est due à *A. F. Möbius*[716]) et *L. Cremona*; *H. Schröter*, *R. Sturm* l'utilisèrent dans leurs recherches[717]); *W. F. Meyer*[718]) le fit également intervenir dans ses travaux sur la cubique considérée comme courbe normale de l'espace à trois dimensions.

**G. Kohn*[719]) a étudié le système de deux cubiques ayant un tétraèdre osculateur commun et les relations entre un tétraèdre osculateur d'une cubique et un système de deux, trois ou quatre points de la courbe.*

116. Tétraèdres de Möbius. Quatre points d'une cubique gauche sont les sommets d'un tétraèdre; les plans osculateurs en ces points définissent un second tétraèdre; ces deux tétraèdres sont en même temps inscrits et circonscrits l'un à l'autre[720]).

714) *Ann. Éc. Norm. (2) 5 (1876), p. 245; voir aussi, pour d'autres propriétés polaires, *A. C. Dixon*, Quart. J. pure appl. math. 23 (1889), p. 343/54.*

715) *Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8°, 49 (1896), mém. n° 3; 52 (1894/5), mém. n° 2.*

716) Baryc. Calcul[12]), p. 114; Werke 1, p. 117.

717) *L. Cremona*, Ann. mat. pura appl. (1) 1 (1858), p. 164; (1) 2 (1859), p. 19; *H. Schröter*, Math. Ann. 25 (1885), p. 294; *R. Sturm*, Math. Ann. 26 (1886), p. 488; Liniengeometrie[195]) 1, p. 356.

718) Apolarität[689]), p. 47.

719) *Monatsh. Math. Phys. 14 (1903), p. 302/4; Sitzgsb. Akad. Wien 112 IIa (1903), p. 319/32.*

720) Il se rencontre d'abord dans le système focal: *A. F. Möbius*, J. reine angew. Math. 3 (1828), p. 273; Werke 1, Leipzig 1885, p. 439; J. reine angew.

117. Points conjugués. A tout point P correspond un point P' tels que P et P' soient conjugués par rapport à toutes les quadriques du réseau défini par une cubique gauche; l'un de ces points P' est commun aux plans polaires de l'autre par rapport à toutes les quadriques du réseau. On dit que P et P' sont *conjugués*[721]) par rapport à la cubique. La droite PP' est une corde de la cubique.

Th. Reye[722]) a montré que le lieu des conjugués d'un point variable d'une droite est une cubique et que le lieu des conjugués d'un point variable d'un plan est une surface du troisième ordre[722]).

La notion corrélative de celle des points conjugués est celle des *plans conjugués.*

118. *Polyèdres inscrits.* *E. Duporcq*[723]) a étudié les tétraèdres inscrits à une cubique gauche et circonscrits à une quadrique; *G. Fontené*[723a]) a étudié également les octaèdres et les icosaèdres inscrits à une cubique gauche et circonscrits à une quadrique; il a montré qu'il y en a une multiplicité double sous des conditions en nombre 3, 4 ou 5 et a recherché les quadriques qu'il faut associer à une cubique donnée pour qu'il existe de tels polyèdres.*

119. Génération des cubiques. Le lieu du point commun à trois plans homologues de trois faisceaux de plans qui n'ont pas deux à deux un plan homologue commun est une cubique qui admet pour cordes les axes des faisceaux.

Le lieu du point d'intersection de deux rayons homologues concourants de deux gerbes projectives est, en général, une cubique gauche, qui passe par les centres des gerbes.

Ces modes de génération furent signalés, le premier par *H. Schröter*[724]), le second par *F. Seydewitz*[725]), qui les utilisa dans l'étude des propriétés des cubiques gauches; ils sont d'ailleurs contenus implicitement dans le mode de représentation paramétrique de *A. F. Möbius*[726]).

Math. 10 (1833), p. 326; Werke 1, Leipzig 1885, p. 498; cf. *L. I. Magnus,* Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 2, p. 144; *J. Steiner,* Systematische Entw.[85]), p. 247; Werke 1, p. 405; *H. Schröter,* J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 40; *O. Hermes,* id. p. 239; *G. Bauer,* Sitzgsb. Akad. München 27 (1897), p. 359; *H. Krüger,* Z. Math. Phys. 40 (1895), p. 193.*

721) *L. Cremona,* Ann. mat. pura appl. (1) 1 (1858), p. 289; *Th. Reye,* Z. Math. Phys. 13 (1868), p. 521.

722) Geom. der Lage[164]), (3e éd.) 2, Leipzig 1892, p. 214; trad. *O. Chemin* 2, Paris 1882, p. 121; Mitt. math. Ges. Hamburg 2 (1890), éd. Leipzig 1891 (Festschrift), p. 52; *A. Cantone,* Rendic. Accad. Napoli (1) 25 (1886), p. 181.

723) Nouv. Ann. math. (4) 2 (1902), p. 166/69.*

723a) Nouv. Ann. math. (4) 1 (1901), p. 10; (4) 4 (1904), p. 289/309; cf. *R. Bricard,* Bull. Soc math. France 32 (1904), p. 269/84. Voir aussi *Ch. Michel,* Revue de math. spéc. 9 (1906/8), p. 1/3.*

724) J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 37.

120. Détermination et construction des cubiques gauches. Une cubique est déterminée par six points[727]) ou par des points et, des transversales ou des cordes données*, la construction d'une cubique assujettie à de telles conditions a été l'objet de nombreux travaux; *A. F. Möbius*[728]) a le premier traité le problème de la détermination de la courbe définie par six points. Des théorèmes analogues au

725) Archiv Math. Phys. (1) 10 (1847), p. 203; cf. *M. Chasles,* Aperçu hist.[41]), p. 405; J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 399/402; *L. Cremona,* Ann. mat. pura appl. (1) 1 (1858), p. 165; J. reine angew. Math. 58 (1861), p. 144. *K. G. Chr. von Staudt,* Beiträge[58]), fasc. 3, Nuremberg 1860, p. 325; *F. Schur,* Math. Ann. 18 (1881), p. 1; *A. del Re,* Rend. Circ. mat. Palermo 1 (1887), p. 272.

Les deux modes de génération sont réunis dans la représentation de la cubique gauche par une matrice à deux lignes et trois colonnes de formes linéaires. *M. Stuyvaert* [Bull. Acad. Belgique 9 (1907), p. 515/37] en fait usage pour l'invariantologie de la cubique et pour les congruences de cubiques.*

Le second mode de génération montre que la courbe *horoptère* des physiologistes (lieu des points de l'espace qui, quand les yeux se meuvent d'une façon quelconque sont vus simplement) est une cubique gauche [*H. von Helmholtz* [Ann. Phys. and Chemie, Zweite Folge entre (5) 3 (1884) et (4) 25 (1862), 123 (1862), p. 158; Wiss. Abh. 2, Leipzig 1883, p. 440; Handbuch der physiologischen Optik, Berlin 1867, p. 713, 752; Optique physiologique, trad. par *E. Javal* et *N. Th. Klein,* Paris 1867, p. 901, 948]; *E. Hering,* Beiträge zur Physiologie, cah. 4, Leipzig 1864; *F. Schur,* Sitzgsb. Naturf. Ges. Univ. Dorpat (Jurjev) 9 (1891), p. 162; *F. Schuh,* Z. Math. Phys. 47 (1902), p. 375/99; *M. Stuyvaert,* Mathesis (3) 3 (1903), p. 153/62. A l'instigation de *F. Klein* et avec le concours de *F. Schilling, W. Ludwig* a en 1902 construit un modèle de cette courbe (il est en vente chez Martin Schilling, éditeur, autrefois à Halle, actuellement à Leipzig). *L. Godeaux* [Archiv Math. Phys. (3) 13 (1908), p. 155/57] a indiqué un autre mode de description des cubiques.*

726) Baryc. Calcul[12]), p. 114; Werke 1, p. 117.

727) *M. Chasles,* J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 397.

728) Baryc. Calcul[12]), p. 86, 117; Werke[12]) 1, p. 94, 119; d'autres constructions ont été indiquées par *M. Chasles* [J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 399], *L. Cremona* [Ann. mat. pura appl. (1) 1 (1858), p. 164/74], *F. Seydewitz* [Archiv Math. Phys. (1) 10 (1847), p. 208].

Au sujet d'une construction erronée de *M. Chasles,* voir *E. Lange* [Z. Math. Phys. 26 (1881), p. 98] et *H. Schröter* [Z. Math. Phys. 26 (1881), p. 264].

Plusieurs autres constructions ont été proposées par *F. Caspary*, J. reine angew. Math. 100 (1887), p. 405/12; Bull. sc. math. (2) 11 (1887), p. 222; (2) 13 (1889), p. 224.

Dans le cas où on se donne cinq points et une corde de la cubique, la construction est encore possible et a été indiquée par *L. O. Hesse,* J. reine angew. Math. 26 (1843), p. 147; Werke, Munich 1897, p. 75; *L. Cremona* [J. reine théorème de Pascal[729]) relatif aux coniques ont été donnés par *M. Chasles, L. Cremona*[730]) et autres, qui ont cherché à étendre ce théorème aux cubiques de différentes manières. *Th. Reye*[731]) et *Cl. Servais*[732]) ont aussi donné un théorème analogue à celui de Desargues[733]); *on a de même étudié des systèmes de points d'une cubique liés par une involution d'ordre quelconque[734]).*

121. Les cubiques gauches dans le complexe tétraédral. Si l'on établit une collinéation entre deux espaces qui coïncident, à tout point P de l'un correspond un rayon d'un complexe tétraédral, qui est la droite joignant P au point P' homologue de P dans le second espace. Le lieu du point P, tel que le rayon correspondant passe par un point fixe O, est une cubique gauche, qui passe par le point O et par les sommets du tétraèdre fondamental de la collinéation, ainsi que l'a montré *A. Cayley*[735]).

Relativement au complexe des axes d'une quadrique, le lieu des points correspondants aux axes issus d'un point O est une hyperbole cubique (122), dont les asymptotes sont parallèles aux directions principales de la quadrique.

angew. Math. 60 (1862), p. 188] a montré que quatre points et deux cordes ne déterminent pas une cubique; le problème est alors indéterminé ou impossible.

Au sujet d'autres conditions imposées à une cubique, voir *R. Sturm*, J. reine angew. Math. 79 (1875), p. 79; 80 (1875), p. 128, 334; *H. Schröter*, Oberflächen zweiter Ordnung[105]), p. 253.

Pour les éléments imaginaires, voir *K. Bobeck,* Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1882, p. 65; *J. Cardinaal,* J. reine angew. Math. 101 (1887), p. 641; *C. Hassfeld,* Z. Math. Phys. 33 (1888), p. 111; *J. Thomae*, Ber. Ges. Lpz. 54 (1902), math. p. 121/4; *Cl. Servais,* Acad. Belgique, classe sc. Mém. in 8°, (2) 1 (1904/6), p. 47.*

729) Cf. III 17, **37**.

730) *M. Chasles*, Aperçu hist.[41]), p. 403; *T. Weddle,* Cambr. Dublin math. J. 5 (1850), p. 68; *L. Cremona,* Ann. mat. pura appl. (1) 1 (1858), p. 174; *K. G. Chr. von Staudt,* Beiträge[58]) 3, Nuremberg 1860, p. 320; *L. Cremona,* J. reine angew. Math. 58 (1861), p. 145; *E. N. Laguerre,* L'Institut (1) 40 (1872), p. 221; *F. Folie,* Bull. Acad. Belgique (2) 36 (1873), p. 620; (2) 38 (1874), p. 65; *A. Petot,* C. R. Acad. sc. Paris 98 (1884), p. 1245; *A. Buchheim,* Messenger math. (2) 14 (1884/5), p. 74.

731) Z. Math. Phys. 13 (1868), p. 523; Mitt. math. Ges. Hamburg 2 (1890), éd. Leipzig 1891 (Festschrift), p. 47.

732) *Annaes da academia polytechnica do Porto 6 (1911), p. 138/41.*

733) *M. Stuyvaert,* Nouv. Ann. math. (4) 6 (1906), p. 348/55. Cf. III 18, **2**.

734) **M. Stuyvaert,* Acad. Belgique, Bull. classe sc. 10 (1908), p. 662/83.*

735) J. math. pures appl. (1) 10 (1845), p. 383; Papers 2, Cambridge 1889, p. 212; d'autres résultats sont dus à *Th. Reye,* Geom. der Lage[164]), (3e éd.) 3, Leipzig 1892, p. 46; trad. *O. Chemin* 2, Paris 1882, p. 156; *R. Sturm,* Liniengeometrie[195]) 1, p. 342; **Cl. Servais,* Mathesis (3) 3 (1903), p. 185/93.*

122. Classification par les points à l'infini. *F. Seydewitz*[736]) a classé les cubiques gauches d'après la nature de leurs points à l'infini; il a ainsi distingué quatre espèces de cubiques:

I. l'*ellipse gauche,* qui a un point réel et deux points imaginaires conjugués à l'infini;

II. l'*hyperbole gauche*, qui a trois points réels distincts à l'infini;

III. l'*hyperbole parabolique,* qui a trois points réels à l'infini, dont deux coïncident;

IV. la *parabole gauche* dont les trois points à l'infini sont confondus.

La tangente en un point à l'infini peut être à distance finie; c'est alors une *asymptote*; l'hyperbole gauche a trois asymptotes; l'ellipse gauche et l'hyperbole parabolique en ont une; la parabole gauche n'en a pas.

Par une cubique on peut faire passer un cône du second degré ayant son sommet en un point quelconque de la courbe; si le sommet est un point à l'infini, le cône devient un cylindre; à chaque point à l'infini correspond ainsi un cylindre sur lequel est tracée la courbe: par l'ellipse gauche passe un cylindre elliptique; par l'hyperbole gauche passent trois cylindres hyperboliques; par l'hyperbole parabolique passent un cylindre hyperbolique et un cylindre parabolique; par la parabole gauche passe un cylindre parabolique[737]).

D'après *A. F. Möbius*[738]), *L. Cremona* a représenté les trois premières espèces de cubiques au moyen des formules suivantes qui donnent les coordonnées obliques d'un point de la courbe en fonction d'un paramètre t:

$$x = \frac{a t^3}{(\alpha - t)^2 - \beta}, \quad y = \frac{b t^2}{(\alpha - t)^2 - \beta}, \quad z = \frac{c t}{(\alpha - t)^2 - \beta},$$

736) Archiv Math. Phys. (1) 10 (1847), p. 203; *L. Cremona,* J. reine angew. Math. 58 (1861), p. 146.

737) *L. Cremona,* J. reine angew. Math. 58 (1861), p. 147. Les quatre espèces de cubiques ont été représentées par *E. Lange* au moyen de cylindres de plâtre; *W. von Dyck,* Katalog[149]), p. 268; en 1902, *W. Ludwig* a de même construit des cylindres en celluloïd (en vente chez *Martin Schilling* éditeur, autrefois à Halle, actuellement à Leipzig); **H. Wiener* a construit des modèles (en fil de fer) représentant les quatre types de cubiques (ils sont en vente chez B. G. Teubner à Leipzig). Cf. Verzeichnis math. Modelle-Sammlungen *H. Wiener* und *P. Treutlein,* Leipzig et Berlin 1912, p. 29/31; *H. Wiener,* Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 22 (1913), p. 298 (Note de *F. Dingeldey*).*

738) Der baryc. Calcul[12]), p. 167; Werke 1, Leipzig 1885, p. 157; *L. Cremona,* J. reine angew. Math. 58 (1861), p. 149; cf. *F. Joachimsthal,* J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 44. *R. Mehmke* [Vorlesungen über Punkt- und Vektorrechnung, Leipzig 1913, p. 198] utilise à nouveau l'exposé de *A. F. Möbius.* Voir aussi le nouvel examen des espèces entre lesquelles se distribuent les cubiques gauches, dû à *O. Staude,* Analytische Geometrie der kubischen Kegelschnitte, Leipzig 1913, p. 86/145.

qui sont relatives à l'ellipse si $\beta < 0$, à l'hyperbole, si $\beta > 0$, à l'hyperbole parabolique si $\beta = 0$.

Les coordonnées d'un point de la parabole cubique sont données par

$$x = at^3, \quad y = bt^2, \quad z = ct.$$

L. Cremona[739]) a montré que par une cubique gauche passent toujours des quadriques de révolution, en nombre égal à deux pour I et III, à 4 pour II, à un pour IV.

123. Diamètres. Parmi les arêtes d'un tétraèdre osculateur [n° **115**], il y a deux rayons osculateurs de la cubique; ce sont les axes d'une collinéation involutive, qui transforme la courbe en elle-même; dans le cas où l'une des transversales est rejetée à l'infini, l'autre partage en deux parties égales toutes les cordes qui la rencontrent; on l'appelle, d'après *L. Cremona*[740]), un *diamètre.* L'ellipse gauche a un diamètre réel, l'hyperbole gauche en a trois, l'hyperbole parabolique n'en a pas et la parabole gauche en a une infinité.

Il y a d'ailleurs encore une autre sorte de diamètres d'une cubique, savoir ceux qui sont formés par les axes des cylindres (elliptiques et hyperboliques) perspectifs à la cubique.

*On peut se placer à un autre point de vue et considérer le système focal défini par la cubique; ce système focal possède une infinité de diamètres parallèles d'une troisième sorte dont l'un, que l'on appelle *axe,* est lieu des foyers des plans qui lui sont perpendiculaires.*

124. Courbure. Un grand nombre d'auteurs se sont occupés de la sphère osculatrice à une cubique; des constructions ont été indiquées

739) *L. Cremona,* J. reine angew. Math. 63 (1864), p. 141; *A. C. Dixon,* Quart. J. pure appl. math. 24 (1890), p. 30. Sur les surfaces de révolution tangentes à tous les plans osculateurs, voir *H. Krüger,* Diss. Breslau 1885; *Th. Reye,* Mitt. math. Ges. Hamburg 2 (1890), éd. Leipzig 1891 [Festschrift], p. 59. Les équations de ces surfaces de révolution ont été données par *O. Staude,* Kubische Kegelschnitte[738]), p. 64.

740) *L. Cremona,* Nouv. Ann. math. (1) 19 (1860), p. 360; J. reine angew. Math. 58 (1861), p. 147; *R. Sturm,* Math. Ann. 26 (1886), p. 488; *H. Schröter,* Oberflächen zweiter Ordnung[105]), p. 329. Sur le centre d'une cubique, voir *L. Geisenheimer,* Z. Math. Phys. 27 (1882), p. 321; *31 (1886), p. 207/13*; sur les plans conjugués, voir *L. Cremona,* Nouv. Ann. math. (2) 1 (1862), p. 301; Ann. mat. pura appl. (1) 1 (1858), p. 288; *Th. Reye,* Mitt. math. Ges. Hamburg 2 (1890), éd. Leipzig 1891 [Festschrift], p. 54; *Cl. Servais,* *Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8°, 49 (1896), mém. n° 3, p. 47 [1894];* Mathesis (3) 4 (1904), p. 105; *M. Stuyvaert,* Mathesis (3) 4 (1904), p. 218; sur les propriétés des diamètres au sens de *L. Cremona,* voir *J. Conran,* Proc. Irish Acad. (Dublin), section A, 27 (1907/9), p. 249/61; sur les diamètres au point de vue du système focal, voir *P. Appell,* Ann. Éc. Norm. (2) 5 (1876), p. 245; *F. Dumont,* Introduction à la géométrie du troisième ordre, Annecy 1904, p. 115.*

par *Emil Weyr, H. E. Timerding, R. Sturm, J. Sobotka, M. Stuyvaert*[741]); *Cl. Servais, R. Sturm* et *H. Krüger*[742]) ont également étudié d'autres éléments tels que les binormales, les normales principales, les plans rectifiants, la courbure et la torsion.

125. Propriétés métriques et propriétés focales. On appelle *droites focales* d'une cubique les intersections des six plans, pris deux à deux, qui sont à la fois osculateurs à la courbe et tangents à l'ombilicale. Il existe en général trois droites focales réelles. A ces droites se rattachent des propriétés focales signalées par *H. Krüger*[743]). Cet auteur a aussi étudié les sommets des trièdres trirectangles dont les faces sont osculatrices à la cubique; il existe en général deux tels points, sauf pour la parabole gauche, à laquelle correspond une infinité simple de tels points. Il a également considéré les droites intersections de deux plans osculateurs rectangulaires et les droites telles qu'à tout plan passant par une de ces droites corresponde un plan rectangulaire conjugué [n° **117**].

126. Cubiques particulières. L'*hyperbole gauche équilatère*[744]) est une courbe dont les asymptotes sont deux à deux rectangulaires; toute quadrique menée par la cubique, en particulier tout cône ayant son sommet sur la courbe et défini par cette cubique, est équilatère.

741) *Emil Weyr,* Reale Ist. Lombardo, Rendic. (2) 4 (1871), p. 636; *H. E. Timerding,* Diss. Strasbourg 1894; *J. Sobotka,* Monatsh. Math. Phys. 5 (1894), p. 349; *R. Sturm,* Z. Math. Phys. 40 (1895), p. 1/14; **J. Sobotka,* Sitzgsb. Akad. Wien 104 IIᵃ (1895), p. 149/53; *M. Stuyvaert,* Nouv. Ann. math. (4) 3 (1903), p. 64/8.*

742) *H. Krüger,* Diss. Breslau 1885; *Th. Reye,* Mitt. math. Ges. Hamburg 2 (1890), éd. Leipzig 1891 [Festschrift], p. 60; *R. Mehmke,* Math.-naturw. Mitt. Württemb. (1) 4 (1891/2), p. 69; **R. Sturm,* Z. Math. Phys. 40 (1895), p. 1/14; *H. E. Timerding,* Ann. mat. pura appl. (3) 4 (1900), p. 199/217; *Cl. Servais,* Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8°, 58 (1898/9), mém. n° 4, p. 19, 34, 44; Acad. Belgique, classe sc. Mém. in 8°, (2) 1 (1904/6), mém. n° 4, p. 12/23; Nouv. Ann. math. (4) 11 (1911), p. 299; Mathesis (3) 9 (1909), p. 5/8.*

743) Diss. Breslau 1885; *J. Winzer,* Diss. Leipzig 1888; *W. Wirtinger* [Sitzgsb. Akad. Wien 94 II (1886), p. 302] a recherché des lieux de foyers de coniques osculatrices à une parabole gauche. D'autres propriétés métriques ont été signalées par: *A. Hurwitz,* Math. Ann. 25 (1885), p. 287; *H. Schröter,* id. p. 293; *G. Loria,* Rendic. Accad. Napoli (1) 24 (1885), p. 298; *D. Valeri,* Memorie Accad. Modena (2) 8 (1892), p. 385; *E. Heinrichs,* Z. Math. Phys. 39 (1894), p. 213, 273; *R. Mehmke,* id. 40 (1895), p. 211; **H. Krüger,* id. 40 (1895), p. 193/210; *M. Stuyvaert,* Acad. Belgique, Bull. classe sc. 2 (1900), p. 820/46; *G. Majcen,* Archiv Math. Phys. (3) 13 (1908), p. 144/9.*

744) *Th. Reye,* Geom. der Lage[307]), (3ᵉ éd.) 2, p. 142; trad. *O. Chemin* 2, p. 185; Mitt. math. Ges. Hamburg 2 (1890), éd. Leipzig 1891 [Festschrift], p. 56; *Ch. Bioche,* Proc. Edinb. math. Soc. 13 (1894/5), p. 146; *O. Staude,* Ber. Ges. Lpz. 51 (1899), math. p. 219.

L'hyperbole gauche équiangle[745]) (gleichwinklige) est telle que les sections de sa surface développable osculatrice sont toutes des hyperboles équilatères, dont les centres sont sur un même cercle.

Parmi les ellipses gauches, on a étudié celles qui sont projetées de chacun de leurs points suivant des cônes orthogonaux[746]) et celles qui peuvent être placées sur un cylindre de révolution[747]).

W. Wirtinger et *A. Hurwitz*[748]) ont considéré une cubique gauche, qui rencontre en deux points l'ombilicale.

O. Staude[749]) étudie deux classes particulières d'ellipses gauches dont la première se confond avec l'ensemble des cubiques envisagées par *W. Wirtinger* et *A. Hurwitz*.

Dans les ellipses gauches de la première classe, les deux sommets imaginaires E_2, E_3 du triangle $E_1E_2E_3$, formé par les trois points infinis de l'ellipse gauche, sont situés sur l'ombilicale, et les deux surfaces de révolution envisagées au n° **122** sont confondues.

Dans les ellipses gauches de la seconde classe, les deux côtés imaginaires E_1E_2 et E_1E_3 du même triangle $E_1E_2E_3$ sont tangents à l'ombilicale, et les deux surfaces de révolution du n° **122** sont l'une un cylindre de révolution, l'autre un hyperboloïde de révolution.

La cubique circulaire appartient aux deux classes à la fois[750]); les deux côtés E_1E_2, E_1E_3 sont tangents à l'ombilicale aux sommets E_2, E_3, et les deux surfaces de révolution sont confondues en un cylindre de révolution.

O. Böklen et *W. F. Meyer*[751]) ont reconnu qu'il existe des paraboles gauches telles que le lieu des points d'où l'on peut leur mener trois plans osculateurs rectangulaires deux à deux soit une droite; cette droite a été appelée la *directrice* de la courbe. La courbe horoptère a été mentionnée dans la note 725.

745) *H. Krüger*, Z. Math. Phys. 38 (1893), p. 344.

746) *Th. Reye*, Geom. der Lage[307]), (3e éd.) 2, p. 176.

747) *R. O. Consentius*, Z. Math. Phys. 25 (1880), p. 119; *Th. Reye*, Geom. der Lage[307]), (3e éd.) 2, p. 176.

748) *W. Wirtinger*, Sitzgsb. Akad. Wien 94 II (1886), p. 302; *A. Hurwitz*, Math. Ann. 30 (1887), p. 291; *A. Schoenflies*, Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung, Leipzig 1886, p. 117/9; trad. par *Ch. Speckel*, La géométrie du mouvement, exposé synthétique, Paris 1893, p. 119/22; *R. Bricard*, Bull. Soc. math. France 32 (1904), p. 269/84.*

749) Kubische Kegelschnitte[738]), p. 81, 83.

750) *A. Schoenflies*, Geom. der Bewegung[748]), p. 118; Géom. du mouvement, p. 121; *F. Schur*, Sitzgsb. Naturf. Ges. Univ. Dorpat (Jurjev) 9 (1889/91), p. 162; *F. Schuh*, Z. Math. Phys. 47 (1902), p. 375/99; *R. Sturm*, Geom. Verwandtschaften[432]) 2, p. 180; *M. Schilling*, Catalog Math. Modelle, (7e éd.) Leipzig 1911, p. 74, 133.

751) *O. Böklen*, Z. Math. Phys. 29 (1884), p. 378; *W. F. Meyer*, Math.-naturw. Mitt. Württemb. (1) 1 (1884/6), p. 11; Z. Math. Phys. 30 (1885), p. 345; *H. S. White*, Trans. Amer. math. Soc. 4 (1903), p. 134/41.* Les caractères distinctifs des sous-espèces ont été formulés analytiquement par *O. Staude*, Kubische Kegelschnitte[738]), préface p. IV.

127. Transformation d'une cubique en elle-même. Les collinéations en nombre infini (multiplicité 3) qui transforment une cubique gauche en elle-même ont été étudiées d'abord par *F. Klein* et *S. Lie*[752]). La question a été reprise synthétiquement par *R. Sturm*[753]), *qui a montré qu'une collinéation donnée ne laisse, en général, aucune cubique invariante; que, si une cubique est invariante, il existe une multiplicité double de telles courbes et qu'elles admettent comme tétraèdre osculateur le tétraèdre fondamental de la collinéation.* Il a également recherché les corrélations qui laissent une cubique invariante.

128. Formes binaires sur une cubique gauche. La représentation paramétrique

$$\frac{x_1}{\lambda^3} = \frac{x_2}{\lambda^2\mu} = \frac{x_3}{\lambda\mu^2} = \frac{x_4}{\mu^3}$$

établit entre les points d'une cubique gauche et d'une droite une correspondance univoque, λ et μ étant considérées à volonté comme coordonnées homogènes sur la cubique ou sur la droite, et il est manifeste que la théorie des formes binaires s'applique entièrement à l'étude de groupes de points situés sur une cubique gauche ainsi qu'à celle de groupes de plans ou de droites liés à la considération de cette courbe[754]).

129. Relations invariantes entre deux cubiques gauches et une quadrique. Si les huit sommets de deux tétraèdres appartiennent à une même cubique, les huit faces sont osculatrices à une autre cubique;

752) *F. Klein* et *S. Lie*, C. R. Acad. sc. Paris 70 (1870), p. 1222, 1275; *S. Lie* et *F. Engel*, Transformationsgruppen[526]) 3, p. 185/87; *F. Klein*, Höhere Geometrie[104]) 1, p. 391; *Eug. Meyer*, Math. Ann. 64 (1907), p. 224.*

753) *R. Sturm*, Math. Ann. 26 (1886), p. 465; *D. Montesano*, Atti R. Accad. Lincei *Memorie mat.* (4) 3 (1886), p. 105; *Th. Reye*, Geom. der Lage[307]), (4e éd.) 2, p. 99, 208; trad. *O. Chemin*[307]) 2, p. 100, 210.

754) *E. N. Laguerre*, L'Institut (1) 40 (1872), p. 221; *R. Sturm*, J. reine angew. Math. 86 (1879), p. 116; *A. Voss*, Math. Ann. 13 (1878), p. 232; *E. d'Ovidio*, Giorn. mat. (1) 17 (1879), p. 310; *Memorie Accad. Torino (2) 32 (1880), p. 1/75;* *G. Pittarelli*, Giorn. mat. (1) 17 (1879), p. 260; *C. Le Paige*, Sitzgsb. Akad. Wien 81 II (1880), p. 159; *Emil Weyr*, Sitzgsb. Akad. Wien 84 II (1881), p. 1264; *W. F. Meyer*, Apolarität[689]), p. 156; *F. Lindemann*, Math. Ann. 23 (1884), p. 111; *F. von Krieg*, Z. Math. Phys. 29 (1884), supplément p. 38; *E. Waelsch*, Sitzgsb. Akad. Wien 100 IIa (1891), p. 803; *L. Berzolari*, Rend. Circ. mat. Palermo 5 (1891), p. 9/50; *Adolf Weiler*, Z. Math. Phys. 24 (1879), p. 159; *F. Deruyts*, Bull. Acad. Belgique (3) 17 (1889), p. 312.*

il y a alors une infinité (simple) de tétraèdres inscrits à la première courbe et circonscrits à la seconde et chaque point de la première est sommet d'un tel tétraèdre.

Ce théorème, dû en partie à *K. G. Chr. von Staudt,* a été développé complètement par *A. Hurwitz* et *W. F. Meyer*[755]).

**G. Kohn*[756]) a étudié également deux cubiques qui sont invariantes à la fois par rapport à un groupe octaédrique et à un groupe icosaédrique de collinéations.*

Deux tétraèdres inscrits dans une cubique sont aussi tétraèdres autopolaires par rapport à une quadrique; si une infinité (multiplicité simple) de tétraèdres autopolaires par rapport à une quadrique sont inscrits dans une cubique, cette dernière est appelée la *cubique polaire* de la quadrique. Ces relations indiquées d'abord par *Th. Reye* furent l'objet d'une étude approfondie de *W. F. Meyer*[757]).

130. Faisceaux et gerbes de cubiques gauches. Les cubiques placées sur un hyperboloïde et passant par quatre points donnés constituent un *faisceau* de cubiques; elles rencontrent les génératrices rectilignes d'un système en des points en involution. Une génératrice variable de l'autre système est rencontrée par quatre cubiques du faisceau en des points dont le rapport anharmonique est constant[758]).

Les cubiques passant par cinq points de l'espace forment une *gerbe* ou *congruence* de cubiques; par un point donné de l'espace, il passe en général une courbe de la gerbe. Les triangles déterminés par les cubiques de la gerbe dans un plan sont conjugués dans un système polaire[759]). *Cette gerbe particulière a été étudiée par *Th. Reye*;

755) *K. G. Chr. von Staudt,* Beiträge[334]), fasc. 3, Nuremberg 1860, p. 378; *A. Hurwitz,* Math. Ann. 15 (1879), p. 14; 20 (1882), p. 135; *W. F. Meyer,* A polarität[689]), p. 210; cf. *Th. Reye,* Mitt. math. Ges. Hamburg 2 (1890), éd. Leipzig 1891 [Festschrift], p. 47, 52; *Th. Reye,* Geom. der Lage[307]), 3e éd.) 2, p. 227; *R. Sturm,* Liniengeometrie[196]) 1, p. 329.

756) **G. Kohn,* Sitzgsb. Akad. Wien 108 IIa (1899), p. 58; *E. Ciani,* Rend. Circ. mat. Palermo 16 (1902), p. 327.*

757) *Th. Reye,* J. reine angew. Math. 82 (1877), p. 67; *L. Cremona,* Reale Ist. Lombardo, Rendic. (2) 12 (1879), p. 347; *W. F. Meyer,* Apolarität[689]), p. 195/222, 277 et suiv.; Über das einer Fläche 2ter Ordnung ein- und zugleich einer kubischen Raumkurve umbeschriebene Tetraeder [Math.-naturw. Mitt. Württemb. (1) 1 (1884/6), éd. 1887, cah. 2 (1885), p. 59/69; Math. Ann. 26 (1886), p. 154.

758) Cf. *M. Chasles,* J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 403; *L. Cremona,* Ann. mat. pura appl. (1) 1 (1858), p. 287; pour l'étude du faisceau sur un cône du second ordre, voir id. p. 285.

759) *Th. Reye,* Z. Math. Phys. 13 (1868), p. 521; Geom. der Lage[307]), (3e éd.) 2, p. 223; trad. *O. Chemin* 2, p. 210; *H. Müller,* Math. Ann. 1 (1869), p. 407;

une autre, considérée par *R. Sturm*[760]), est l'ensemble des cubiques qui admettent, de la même manière, un même tétraèdre osculateur. Ces deux gerbes ne sont que des cas particuliers d'une autre plus générale définie par *M. Stuyvaert.* L'étude des gerbes de courbes gauches algébriques a été commencée par *E. Veneroni*[761]) et appliquée par lui aux cubiques gauches. *M. Stuyvaert*[762]) a indiqué une classification des gerbes linéaires de cubiques gauches et a étudié en détail deux d'entre elles.*

Les quartiques.

131. Aperçu général. On peut distinguer trois périodes dans l'étude des *quartiques* ou courbes gauches du quatrième ordre.

La première période commence avec la représentation par *G. Monge*[763]) de l'intersection des cônes et des cylindres au moyen des procédés de la géométrie descriptive et avec l'étude de quelques courbes particulières, telles que les lignes de courbure des quadriques. Les résultats les plus importants à signaler dans cette période sont l'existence des quatre cônes qui font partie d'un faisceau ponctuel de quadriques[764]) et la dualité entre une biquadratique [no **132**] et la développable circonscrite à deux quadriques[765]).

R. Sturm, J. reine angew. Math. 79 (1875), p. 99; *F. Gerbaldi,* Atti Accad. Torino 15 (1879/80), p. 810; *G. Koenigs,* Nouv. Ann. math. (3) 2 (1883), p. 301; *J. Cardinaal,* J. reine angew. Math. 101 (1887), p. 142; *A. C. Dixon,* Quart. J. pure appl. math. 23 (1889), p. 343; **G. Humbert,* J. Éc. polyt. (1) cah. 64 (1894), p. 123/94; *Cl. Servais,* Acad. Belgique, classe sc. Mémoires in 8°, (2) 1 (1904/6), mém. no 2, p. 51; *M. Stuyvaert,* Nouv. Ann. math. (4) 6 (1906), p. 348/55.*

760) *E. Heinrichs,* Diss. Munster en/W. 1887; *Silldorf,* Z. Math. Phys. 19 (1874), p. 391; *A. Voss,* Math. Ann. 13 (1878), p. 237; *R. Sturm,* id. 26 (1886), p. 490; 28 (1887), p. 271; *M. Lelieuvre,* C. R. Acad. sc. Paris 117 (1893), p. 537, 616; *G. Kohn,* Sitzgsb. Akad. Wien 105 IIa (1896), p. 1035; **M. Stuyvaert,* Nouv. Ann. math. (3) 19 (1900), p. 548/57;* *R. Sturm,* Liniengeometrie[196]) 1, p. 79, 360.

761) **E. Veneroni,* Rend. Circ. mat. Palermo 16 (1902), p. 209/29; Reale Ist. Lombardo, Rendic. (2) 37 (1904), p. 259.*

762) **M. Stuyvaert,* Thèse, Gand 1902, p. 38/72; C. R. Acad. sc. Paris 141 (1905), p. 750; J. reine angew. Math. 132 (1907), p. 216/37; Acad. Belgique, Bull. classe sc. 9 (1907), p. 470/514, 515/37; Mém. Soc. sc. Liége (3) 7 (1907), mém. no 2, p. 94/119; Rend. Circ. mat. Palermo 26 (1908), p. 64/99; *J. de Vries,* K. Akad. Wetensch. Amsterdam Verslagen natuurk. Afdeeling 17 (1907/8), p. 2/6; Proc. of the sections of sciences K. Akad. Wetensch. (Amsterdam) 11 (1908/9), p. 84/8; *L. Godeaux,* Nouv. Ann. math. (4) 9 (1909), p. 261/6; (4) 11 (1911), p. 1/17; Acad. Belgique, Bull. classe sc. 11 (1909), p. 693/9; 13 (1911), p. 371/5.*

763) *G. Monge,* Géom. descriptive[176]), (2e éd.) p. 83.

764) *G. Lamé,* Examen[44]), p. 72; *J. V. Poncelet,* Propriétés projectives[41]), (1re éd.) 1, p. 392, 395.

Une seconde période date de la découverte par *M. Chasles*[766]) de l'existence des deux points doubles de la projection centrale d'une biquadratique; à cette période, on peut rattacher la découverte de la quartique de seconde espèce[767]), et la distinction des quartiques de première espèce en trois types ainsi que la détermination des singularités de ces courbes[768]).

La troisième période est caractérisée par l'introduction de la notion de genre et de la liaison qui existe entre la théorie des biquadratiques et celle des fonctions elliptiques[769]). Pendant cette période, l'étude des quartiques a été poussée très avant par l'application de trois théories: fonctions elliptiques[770]), invariants[771]), géométrie synthétique[772]).

132. Espèces et types. Une *quartique* (courbe gauche du quatrième ordre) est une courbe algébrique non plane qui a quatre points communs avec un plan[773]).

Il existe deux espèces de quartiques[774]). Une quartique de *première*

765) *J. V. Poncelet,* J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 37; *M. Chasles,* Aperçu hist.[41]), p. 397, 406.

766) *M. Chasles,* Aperçu hist.[41]), p. 249; C. R. Acad. sc. Paris 53 (1861), p. 767.

767) *G. Salmon,* Cambr. Dublin math. J. 5 (1850), p. 40; *J. Steiner,* Monatsb. Akad. Berlin 1856, p. 50; J. reine angew. Math. 53 (1857), p. 133; Werke 2, Leipzig 1882, p. 649.

768) *L. O. Hesse,* J. reine angew. Math. 41 (1851), p. 285/92; Werke, Munich 1897, p. 279; *G. Salmon,* Cambr. Dublin math. J. 5 (1850), p. 37; *A. Cayley,* Cambr. Dublin math. J. 5 (1850), p. 46; Papers 1, Cambridge 1889, p. 486/91; *M. Chasles,* Aperçu hist.[41]), p. 250; C. R. Acad. sc. Paris 54 (1862), p. 317/24, 418/25.

769) *A. Clebsch,* J. reine angew. Math. 64 (1865), p. 210, 224; 63 (1864), p. 235 [1863].

770) *E. N. Laguerre,* J. math. pures appl. (2) 15 (1870), p. 199; Œuvres 2, Paris 1905, p. 144; *W. Killing,* Diss. Berlin 1872, p. 11; *A. Harnack,* Math. Ann. 12 (1877), p. 47/86; *G. H. Halphen,* Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications 2, Paris 1888, p. 450; *G. Loria,* Atti R. Accad. Lincei (4) 6 II (1890), p. 184; *Giorn. mat. (1) 31 (1893), p. 179.*

771) *A. Voss,* Math. Ann. 10 (1876), p. 168, 176/7 [1875]; *A. Harnack,* Math. Ann. 12 (1877), p. 74; *G. Westphal,* Math. Ann. 13 (1878), p. 16.

772) *R. Sturm,* Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, Leipzig 1867, p. 68/80, 181/6, 254/6; *Th. Reye,* Die Geometrie der Lage, (1re éd.) 2, Hanovre 1868, p. 130/3; (4e éd.) 3, Leipzig 1910, p. 32; trad. *O. Chemin*[207]) 2, p. 164/7; *H. Schröter,* Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Raumcurven 4 Ordnung, erster Species, Leipzig 1890, p. 1/100.

773) *G. Monge* [Géom. descriptive[176]), (2e éd.) p. 83] définissait ces courbes comme intersection de deux quadriques; cf. *J. N. P. Hachette,* Correspondance 1, sur l'Éc. polyt. 1 (1804/8), p. 368; *J. V. Poncelet,* Propriétés projectives[41]), (1re éd.) p. 392; *A. Quetelet,* Correspondance math. phys. 5 (1829), p. 195; *M. Chasles,* Aperçu hist.[41]), p. 248.

espèce est l'intersection de deux quadriques qui n'ont en commun ni une génératrice, ni une conique. On l'appelle pour cette raison une *biquadratique*[774a]).

Une quartique de seconde espèce est l'intersection partielle d'une surface de troisième ordre et d'une quadrique qui ont en commun deux droites non situées dans un même plan; par une telle courbe, on ne peut faire passer qu'une seule quadrique.

Une quartique de première espèce ne peut avoir plus de deux points communs avec une droite; une quartique de seconde espèce peut avoir trois points communs avec une droite.

On peut distinguer les biquadratiques en trois types[775]) φ_4, φ_4', φ_4'', suivant qu'elles n'ont pas de point singulier, qu'elles ont un point double à tangentes distinctes ou qu'elles ont un point de rebroussement [n° **101**]. A ces courbes correspondent par dualité trois développables[776]) de quatrième classe circonscrites à deux quadriques Φ_4, Φ_4', Φ_4''.

133. Les singularités. Désignons par m l'ordre, par r le rang et par n la classe d'une courbe gauche; par α le nombre des plans osculateurs stationnaires, par β celui des points stationnaires, par x celui des points de rencontre de deux tangentes situées dans un plan, par y celui des plans issus d'un point et contenant deux tangentes,

774) La distinction est due à *G. Salmon,* Cambr. Dublin math. J. 5 (1850), p. 40; *J. Steiner,* J. reine angew. Math. 53 (1857), p. 138; Werke 2, Berlin 1882, p. 656; cf. *R. Sturm,* Flächen dritter Ordnung[175]), p. 185; *L. Cremona,* Ann. mat. pura appl. (1) 4 (1861), p. 73.

774a) **E. N. Laguerre* [Nouv. Ann. math. (2) 11 (1872), p. 420; Œuvres 2, Paris 1905, p. 298, en note] avait proposé de réserver le nom de quartiques aux courbes gauches du quatrième ordre de seconde espèce; il appelle biquadratiques celles de première espèce.*

Sur la bibliographie relative aux quartiques de seconde espèce, voir *K. Rohn,* Ber. Ges. Lpz. 42 (1890), math. p. 208; **L. Berzolari,* Ann. mat. pura appl. (2) 20 (1892), p. 101; **H. W. Richmond,* Trans. Cambr. philos. Soc. 19 (1899/1904), éd. 1904, p. 132/50 [1900].*

775) Les trois types avec leurs couples d'équations canoniques ont été donnés par *A. Cayley,* Cambr. Dublin math. J. 5 (1850), p. 48, Papers 1, Cambridge 1889, p. 486/91.

776) *J. V. Poncelet,* J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 37; *M. Chasles,* Aperçu hist.[41]), p. 406; *A. Cayley,* Cambr. Dublin math. J. 5 (1850), p. 46; Papers 1, Cambridge 1889, p. 488 (enveloppe de quatrième classe); *M. Chasles,* C. R. Acad. sc. Paris 54 (1862), p. 419, 715. La développable est un cas particulier des surfaces tétraédrales symétriques de *J. Maillard de la Gournerie,* Recherches sur les surfaces tétraédrales symétriques, Paris 1866; elle est du huitième ordre et a quatre coniques doubles.

par g celui des axes [n° **110**] situés dans un plan, et par h celui des cordes issues d'un point. Ces nombres sont respectivement pour les trois types[777]) φ_4, φ_4', φ_4'' de biquadratiques:

	m	r	n	α	β	x	y	g	h	genre
φ_4	4	8	12	16	0	16	8	32	2	1
φ_4'	4	6	6	4	0	6	4	6	3	0
φ_4''	4	5	4	1	1	2	2	2	2	0

φ_4[778]) est de genre 1; φ_4' et φ_4'' sont de genre 0. Relativement à φ_4'' les singularités qui se correspondent par dualité sont en nombres égaux. Toute surface réglée développable[779]) du cinquième ordre a pour arête de rebroussement une biquadratique φ_4'', et ses plans tangents enveloppent une développable Φ_4''.

134. Représentation paramétrique. Les coordonnées d'un point d'une biquadratique φ_4 peuvent être représentées paramétriquement au moyen des fonctions elliptiques d'un paramètre u sous la forme[780])

$$\frac{x_1}{\sigma_1(u)} = \frac{x_2}{\sigma_2(u)} = \frac{x_3}{\sigma_3(u)} = \frac{x_4}{\sigma(u)}\ {}^{781)}$$

ou

$$\frac{x_1}{p''(u)} = \frac{x_2}{p'(u)} = \frac{x_3}{p(u)} = \frac{x_4}{1}\ {}^{782)}.$$

Le module des fonctions elliptiques est le rapport anharmonique

777) Quelques-uns de ces nombres ont été déterminés par *J. V. Poncelet,* J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 36 (il a donné une limite supérieure de r); *M. Chasles,* [Aperçu hist.[41]), p. 250] a donné la valeur de r; *L. O. Hesse* [J. reine angew. Math. 41 (1851), p. 284; Werke, Munich 1897, p. 278] a donné n. Le tableau complet de ces nombres est dû à *G. Salmon,* Cambr. Dublin math. J. 5 (1850), p. 37.

778) *A. Clebsch,* J. reine angew. Math. 64 (1865) p. 99.

779) *L. Cremona,* C. R. Acad. sc. Paris 54 (1862), p. 604; *M. Chasles,* id. p. 722; *H. A. Schwarz,* J. reine angew. Math. 64 (1865), p. 5; 67 (1867), p. 23; Math. Abh. 2, Berlin 1890, p. 12, 25.

780) *A. Clebsch* [J. reine angew. Math. 63 (1864), p. 235] a donné les principes de cette représentation et de l'application du théorème d'Abel; l'extension à la projection d'une quartique φ_4 sur un plan fut donnée par *A. Clebsch,* J. reine angew. Math. 64 (1865), p. 224.

781) *W. Killing,* Diss. Berlin 1872, p. 11; sur la représentation par les fonctions thêta, voir *G. Loria,* Atti R. Accad. Lincei, *Rendic.* (4) 6 II (1890), p. 179 *et *M. A. Enders,* Nova Acta Acad. Leop. 85 (1906), p. 401.*

782) *G. H. Halphen,* Fonct. ellipt.[770]) 2, p. 450. La forme la plus générale de la représentation est indiquée par *F. Klein,* Abh. Ges. Lpz. 13 (1887), p. 360/2 [1885].

des quatre plans tangents à la courbe menés par une corde[783]) [cf. n° **137**]. On l'appelle souvent le *module* de la biquadratique.

L'avantage de cette représentation tient en particulier au fait que, d'après le théorème d'Abel, en choisissant convenablement le point de la courbe qui correspond à $u = 0$, les valeurs du paramètre qui correspondent à quatre points de la courbe situés dans un plan ou à huit points situés sur une quadrique sont congrus aux périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$[784]).

Les coordonnées homogènes d'un point variable d'une biquadratique φ_4' ou d'une biquadratique φ_4'' (de même que d'une quartique de seconde espèce) sont proportionnelles à des fonctions entières du quatrième degré d'un paramètre[785]); ce sont des courbes gauches *unicursales* du quatrième ordre.

135. La congruence des cordes. La congruence des cordes d'une biquadratique φ_4 se compose des génératrices des quadriques du faisceau dont φ_4 est la courbe fondamentale[786]). Elle est du second ordre[787]) et de sixième classe[788]).

Toutes les cordes qui rencontrent une corde fixe forment un système réglé d'une quadrique du faisceau[789]). Si u et v sont les paramètres des extrémités de la corde variable et $2c$ une constante, les congruences

$$u + v \equiv 2c \quad (\text{modd. } 2\omega_1,\ 2\omega_2)$$

783) *A. Harnack,* Math. Ann. 12 (1877), p. 51; *G. H. Halphen,* Fonct. ellipt.[770]) 2, p. 452; cf. *A. Clebsch,* J. reine angew. Math. 64 (1865), p. 224. On comparera ce résultat à celui [III 19] qui concerne le rapport anharmonique des quatre tangentes menées à une cubique plane par un point quelconque du plan de cette cubique.

784) Des applications ont été données par *E. N. Laguerre,* J. math. pures appl. (2) 15 (1870), p. 199. *Œuvres 2, Paris 1905, p. 144;* *W. Killing,* Diss. Berlin 1872; *A. Harnack,* Math. Ann. 12 (1877), p. 47; *G. Westphal,* Math. Ann. 13 (1878), p. 1/19 [1877]; *E. Lange,* Z. Math. Phys. 28 (1883), p. 1; *L. Gegenbauer,* Sitzgsb. Akad. Wien 93 II (1886), p. 790; *G. Pick,* Sitzgsb. Akad. Wien 98 IIa (1889), p. 536; *G. Loria,* Atti R. Accad. Lincei, *Rendic.* (4) 6 II (1890), p. 179.

785) *W. Killing,* Diss. Berlin 1872, p. 30/6.

786) *L. O. Hesse,* J. reine angew. Math. 41 (1851), p. 272/84 [1849]; Werke, Munich 1897, p. 263/78; *J. Steiner,* J. reine angew. Math. 53 (1857), p. 138; Werke 2, Berlin 1882, p. 656; *Th. Reye,* Ann. mat. pura appl. (2) 2 (1868/9), p. 129.

787) *G. Salmon* [Cambr. Dublin math. J. 2 (1847), p. 68] a donné une construction des deux cordes menées d'un point; voir aussi *L. O. Hesse,* J. reine angew. Math. 41 (1851), p. 272/84 [1849]; Werke, Munich 1897, p. 263/78.

788) Cf. *R. Sturm,* Liniengeometrie[195]) 2, Leipzig 1893, p. 317.

789) *M. Chasles,* C. R. Acad. sc. Paris 54 (1862), p. 318.

et

$$u + v \equiv -2c \quad (\text{modd. } 2\omega_1,\, 2\omega_2)$$

expriment que la corde variable appartient à l'un ou à l'autre système réglé d'une quadrique du faisceau. La constante $2c$ est égale à 0, ω_1, ω_2 ou $\omega_1 + \omega_2$ si la quadrique est un cône du faisceau[790]).

Toutes les cordes qui coupent le tétraèdre conjugué commun aux quadriques du faisceau en quatre points dont le rapport anharmonique est constant forment une surface réglée du huitième ordre et de huitième classe (quadricuspidale); toutes celles qui rencontrent deux arêtes opposées de ce tétraèdre forment une surface réglée du quatrième ordre (quadricuspidale limite)[791]).

136. Les tangentes aux biquadratiques. Parmi les génératrices rectilignes d'un hyperboloïde qui passe par une biquadratique φ_4, il y en a quatre de chaque système qui sont tangentes à la courbe[792]). Les points de contact forment un système de huit points associés[793]) [cf. n° **153**]. Quatre génératrices d'un cône du faisceau de quadriques dont φ_4 est la courbe fondamentale sont tangentes à φ_4.

Si au lieu de φ_4 on envisage une biquadratique φ_4' ou φ_4'', deux génératrices de chaque système ou une génératrice de chaque système de l'hyperboloïde sont tangentes à la courbe[792]).

Les tangentes à une biquadratique forment une surface réglée développable d'ordre huit et de classe douze pour φ_4, d'ordre six et de classe six pour φ_4', d'ordre cinq et de classe quatre pour φ_4''; elles font partie d'un complexe tétraédral.

A. Cayley[794]) a donné l'équation de cette surface règlée, et *G. Loria*[795]) a donné l'expression des coordonnées de la tangente au moyen des fonctions elliptiques.

137. Les plans tangents aux biquadratiques. Par une droite quelconque on peut mener huit plans tangents à une biquadratique φ_4; leurs points de contact sont associés[796]) [n° **153**]; par une transversale on peut mener six plans tangents, et par une corde on peut mener quatre plans tangents, dont le rapport anharmonique est constant[796a]). *A une biquadratique φ_4' on peut mener six plans tangents, et à une biquadratique φ_4'' on peut mener cinq plans tangents par une droite quelconque.*

Les coordonnées u_i d'un plan tangent annulent le discriminant de l'équation du troisième degré [n° **97**]

$$F + H\lambda + K\lambda^2 + G\lambda^3 = 0\text{ [797])}.$$

Les plans tangents doubles d'une biquadratique φ_4 sont les plans tangents aux quatre cônes du faisceau ponctuel dont φ_4 est la courbe fondamentale[798]).

138. Les plans osculateurs à une biquadratique. Les coordonnées u_i des plans osculateurs vérifient les équations

$$3FK - H^2 = 0, \quad 9FG - HK = 0;$$

leur équation développée a été donnée par *L. O. Hesse*[799]) et par *A. Clebsch*[800]).

Les plans osculateurs aux quatre points d'intersection d'une biqua-

790) *E. N. Laguerre,* J. math. pures appl. (2) 15 (1870), p. 197; *Œuvres 2, Paris 1905, p. 145/6*; *W. Killing,* Diss. Berlin 1872, p. 13.

791) Les surfaces quadricuspidales engendrées par les cordes ont été mentionnées par *J. Maillard de la Gournerie,* J. math. pures appl. (2) 15 (1870), p. 264; celles du quatrième ordre ont été signalées par *E. N. Laguerre,* J. math. pures appl. (2) 15 (1870), p. 200, 210. *Œuvres 2, Paris 1905, p. 147/63;* les surfaces quadricuspidales générales ont été étudiées par *A. Harnack,* Math. Ann. 12 (1877), p. 78, qui a signalé leurs relations avec le complexe tétraédral; cf. *A. Ameseder,* Sitzgsb. Akad. Wien 87 II (1883), p. 1181.

792) *M. Chasles,* C. R. Acad. sc. Paris 54 (1862), p. 320; cf. *J. Cardinaal,* Nieuw Archief voor Wiskunde 13 (1886), p. 213.

793) *W. Killing,* Diss. Berlin, p. 13; *Th. Reye,* Ann. mat. pura appl. (2) 2 (1868/9), p. 133.

794) *A. Cayley,* Cambr. Dublin. math. J. 5 (1850), p. 50; Papers 1, Cambridge 1889, p. 486. *A. Cayley* [id. p. 55; Papers 1, p. 492] donne également l'équation de la surface corrélative. Au sujet des surfaces qui correspondent à une biquadratique φ_4' ou une biquadratique φ_4'', voir *H. A. Schwarz,* J. reine angew. Math. 64 (1865), p. 8, 16; Math. Abh. 2, Berlin 1890, p. 16, 24.

795) *G. Loria,* Atti R. Accad. Lincei, *Rendic.* (4) 6 II (1890), p. 184.

796) *M. Chasles,* C. R. Acad. sc. Paris 54 (1862), p. 321; *Th. Reye,* Ann. mat. pura appl. (2) 2 (1868), p. 133.

796a) *Cette proposition se déduit par projection du théorème de *G. Salmon* sur les cubiques planes. Cf. *H. Schröter* [Raumkurven 4. Ordnung[772]), p. 48]. Pour une démonstration géométrique directe voir *A. C. Dixon,* Messenger math. (2) 26 (1896/7), p. 53/4; *Cl. Servais,* Mathesis (3) 9 (1909), p. 8.*

797) *A. Cayley,* Cambr. Dublin math. J. 5 (1850), p. 53; Papers 1, Cambridge 1889, p. 492.

798) Le théorème corrélatif relatif aux faisceaux tangentiels de quadriques est dû à *J. V. Poncelet,* J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 37; cf. *M. Chasles,* C. R. Acad. sc. Paris 54 (1862), p. 717; *R. Sturm,* Liniengeometrie[196]) 2, Leipzig 1893, p. 318.

799) *L. O. Hesse,* J. reine angew. Math. 41 (1851), p. 272 [1849]; Werke, Munich 1897, p. 263.

800) *A. Clebsch,* J. reine angew. Math. 63 (1864), p. 5; *G. Loria* [Atti R. Accad. Lincei, *Rendic.* (4) 6 II (1890), p. 185] les a données sous forme irrationnelle et à l'aide des fonctions elliptiques.

dratique φ_4 et d'un plan rencontrent la courbe en quatre autres points qui sont dans un même plan[801]). Il existe sur une biquadratique φ_4 vingt quatre paires de points tels que le plan osculateur de l'un de ces points passe par l'autre point et inversement[802]).

A une biquadratique φ_4 on peut mener, par un point extérieur, douze plans osculateurs; par un point de la courbe, neuf plans osculateurs, dont six imaginaires et trois réels, le plan des points de contact de ces derniers passant par le point considéré. A une biquadratique φ_4' on peut mener, par un point extérieur, six plans osculateurs; par un point de la courbe on peut en mener trois, dont les points de contact sont dans un plan qui passe par le point donné. A une biquadratique φ_4'' on peut mener par un point extérieur quatre plans osculateurs, et par un point de la courbe on ne peut mener qu'un plan osculateur autre que celui qui est osculateur au point considéré.

Les seize points de contact des plans stationnaires d'une biquadratique φ_4 sont les points de rencontre de la courbe avec les quatre faces du tétraèdre conjugué[803]); tout plan passant par trois de ces points passe par un quatrième[804]). Il y a 745 tétraèdres, dont les quatre faces contiennent les seize points[805]).

Une biquadratique φ_4' possède quatre plans osculateurs stationnaires et une biquadratique φ_4'' en possède un seul; ces plans sont tangents, dans le premier cas aux deux cônes du second ordre, dans le second au cône du second ordre, passant par la courbe et n'ayant pas pour sommet le point double de cette courbe[792]).

139. Le complexe des transversales. Les transversales d'une biquadratique φ_4 forment un complexe du quatrième degré, dont l'équation est, en coordonnées axiales [n° **98**],

$$\chi^2 - 4\varphi\psi = 0.$$

Le cône du complexe relatif à un point extérieur est du quatrième ordre et possède deux génératrices doubles[806]); relativement à un point de φ_4, ce cône est du troisième ordre[807]) et, pour un point principal du faisceau de quadriques, il est du second ordre et doit être considéré comme un cône double[808]).

140. Détermination et construction des biquadratiques. Une biquadratique φ_4 est déterminée par huit points donnés arbitrairement; *si ces huit points forment un système de points associés [n° **153**], ils ne déterminent pas une biquadratique φ_4, mais une gerbe de biquadratiques φ_4 ou un faisceau de biquadratiques φ_4 suivant que l'on considère les quartiques de l'espace ou celles qui sont situées sur une quadrique.* Des constructions d'une biquadratique passant par huit points quelconques ont été indiquées par *Th. Reye*[809]), *R. Sturm*[810]) et d'autres auteurs[811]).

141. Faisceau de biquadratiques situées sur une quadrique. Une biquadratique est coupée par une quadrique quelconque en huit

---

801) *Th. Reye,* Ann. mat. pura appl. (2) 2 (1868/9), p. 129; **Cl. Servais,* Mathesis (3) 9 (1909), p. 7.*

802) *A. Harnack,* Math. Ann. 12 (1877), p. 65; *H. Schröter,* Raumkurven 4. Ordnung[772]), p. 81; *A. Ameseder,* Sitzgsb. Akad. Wien 87 II (1883), p. 1207; *Cl. Servais,* Annaes scientificos da academia polytechnica do Porto 8 (1913), p. 157, 160, 162; Nouv. Ann. math. (4) 11 (1911), p. 299.*

803) *A. Clebsch* [J. reine angew. Math. 63 (1864), p. 5] détermine ces seize points par l'intersection de la biquadratique φ_4 avec une surface du quatrième ordre. Sur les points analogues des biquadratiques φ_4' et φ_4'', voir *M. Chasles,* C. R. Acad. sc. Paris 54 (1862), p. 419. **Ch. Bioche,* Bull. Soc. math. France 33 (1905), p. 18/23; 35 (1907), p. 240/7.*

804) *Th. Reye,* Ann. mat. pura appl. (2) 2 (1868/9), p. 223; **A. Ameseder,* Sitzgsb. Akad. Wien 87 II (1883), p. 1214; *H. Schröter,* Raumkurven 4. Ordnung[772]), p. 84; *Cl. Servais,* Annaes Porto[802]) 8 (1913), p. 170.*

805) Sur ces relations de positions et d'autres analogues, consulter *Th. Reye,* Ann. mat. pura appl. (2) 2 (1868/9), p. 223; *A. Harnack,* Math. Ann. 12 (1877), p. 64; *E. Lange*, Z. Math. Phys. 28 (1883), p. 1; sur les relations correspondantes de fonctions σ, voir *A. Ameseder,* Sitzgsb. Akad. Wien 87 II (1883), p. 1179; *H. Schröter,* Raumkurven 4. Ordnung[772]), p. 85; *E. Toeplitz,* Progr. Breslau 1895; **Cl. Servais,* Annaes Porto[802]) 8 (1913), p. 146/71; *Cl. Servais* [Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8°, (1) 58 (1898/9), mém. n° 2, p. 46/8; Nouv. Ann. math. (4) 11 (1911), p. 289/302] a étudié géométriquement la courbure et la torsion en un point d'une biquadratique φ_4.*

806) *M. Chasles,* Aperçu hist.[41]), p. 249. Sur la construction des deux droites doubles, voir n° **135**, note 787; *A. Milinowski* [J. reine angew. Math. 97 (1884), p. 277] a déduit des propriétés des biquadratiques φ_4 celles des courbes planes du quatrième ordre à deux points doubles; cf. *A. Cayley,* C. R. Acad. sc. Paris 54 (1862), p. 58, 396; Papers 5, Cambridge 1892, p. 7 (où il introduit les surfaces monoïdes); *M. Chasles* [C. R. Acad. sc. Paris 54 (1862), p. 318] considère les surfaces réglées qui font partie du complexe.

807) *A. Quetelet,* Correspondance math. phys. 5 (1829), p. 195; *M. Chasles,* Aperçu hist.[41]), p. 249; applications aux courbes planes dans *A. Milinowski,* J. reine angew. Math. 97 (1884), p. 277.

808) *J. V. Poncelet* [J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 37] où sont établis en même temps les théorèmes corrélatifs.

809) Z. Math. Phys. 13 (1868), p. 528.

810) Math. Ann. 1 (1869), p. 533.

811) *F. Folie,* Bull. Acad. Belgique (2) 36 (1873), p. 620; *A. Harnack,* Math. Ann. 12 (1877), p. 70; *P. Serret,* C. R. Acad. sc. Paris 82 (1876), p. 322, 370; *H. G. Zeuthen,* Math. Ann. 18 (1881), p. 33; *A. Petot,* C. R. Acad. sc. Paris 98 (1884), p. 1245; *L. D. H. Picquet,* J. reine angew. Math. 73 (1871), p. 367; *J. H. Engel,* Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 34 (1889), p. 299; *F. London*, Math. Ann. 38 (1891), p. 364; *H. Schröter,* Raumkurven 4. Ordnung[772]), p. 5.

points associés[812]) [cf. n° **153**]. Deux quartiques φ_4 tracées sur une quadrique se coupent en huit points associés, par lesquels on peut faire passer une infinité (multiplicité simple) de biquadratiques, qui forment un faisceau. Ces courbes déterminent sur une génératrice rectiligne des couples de points en involution; les points doubles de cette involution sont les points de contact des courbes du faisceau tangentes à la génératrice.

Dans un faisceau de biquadratiques φ_4, il y a douze φ_4'[813]).

Si deux biquadratiques φ_4' ont leur point double commun, elles déterminent un faisceau de φ_4' ayant ce même point double; parmi les biquadratiques φ_4' de ce faisceau, il y en a deux qui sont décomposées en une cubique gauche et une génératrice rectiligne[813]).

Sur les gerbes de quartiques φ_4, voir n° **149**.

142. Quadruplet de points. Les points de contact des quatre plans tangents menés par une corde d'une biquadratique φ_4 constituent un *quadruplet de points.* A tout point d'une biquadratique φ_4 correspond un quadruplet dont il fait partie; les paramètres relatifs à ces quatre points sont[814])

$$u, \quad u+\omega_1, \quad u+\omega_2, \quad u+\omega_1+\omega_2.$$

Une biquadratique φ_4 est tangente à quatre génératrices de chaque système d'une quadrique passant par cette courbe; les deux quadruplets de points ainsi définis forment un système de points associés et sont dits associés.

Les tétraèdres formés par deux quadruplets associés forment, avec le tétraèdre auto-polaire du faisceau de quadriques dont φ_4 est la courbe fondamentale, un système de trois tétraèdres desmiques.

143. Triplet de points. Trois points d'une biquadratique φ_4 constituent un triplet si leurs plans osculateurs passent par un quatrième point de φ_4, qui est alors le point où le plan des trois premiers rencontre φ_4[815]).

812) *M. Chasles,* C. R. Acad. sc. Paris 54 (1862), p. 318; *Th. Reye,* Ann. mat. pura appl. (2) 2 (1868/9), p. 129; *R. Sturm,* Math. Ann. 1 (1869), p. 553; *E. N. Laguerre,* J. math. pures appl. (2) 15 (1870), p. 203; *Œuvres 2, Paris 1905, p. 140.*

813) *M. Chasles,* C. R. Acad. sc. Paris 54 (1862), p. 422/4; *H. Schröter,* Raumkurven 4. Ordnung[772]), p. 5.

814) *E. N. Laguerre* [L'Institut (1) 36 (1868), p. 157; Bull. Soc. philom. Paris (6) fasc. 5 (1868), p. 65; J. math. pures appl. (2) 15 (1870), p. 199; *Œuvres 2, Paris 1905, p. 59/63, 147/57*] appelle points conjugués deux points dont les paramètres diffèrent d'une demi-période; à chaque point correspondent trois conjugués. Pour des développements sur les quadruplets, cf. *A. Harnack,* Math. Ann. 12 (1877), p. 67; *H. Schröter,* J. reine angew. Math. 93 (1882) p. 169; Raumkurven 4. Ordnung[772]), p. 48; *A. Ameseder,* Sitzgsb. Akad. Wien 87 II (1883), p. 1180; *G. Loria,* Atti R. Accad. Lincei, *Rendic.* (4) 6 II (1890), p. 184; *Cl. Servais,* Annaes Porto[802]) 8 (1913), p. 154/71; Nouv. Ann. math. (4) 11 (1911), p. 297/8.*

144. Théorèmes de fermeture. La condition nécessaire et suffisante[816]) pour que l'on puisse inscrire dans une biquadratique φ_4 un polygone fermé de $2n$ côtés, dont les côtés soient alternativement des génératrices de l'un et de l'autre système d'une quadrique, est

$$4nc \equiv 0 \quad (\text{modd. } 2\omega_1,\ 2\omega_2),$$

$2c$ étant la constante relative à cette quadrique [n° **135**]; il y a alors une infinité (multiplicité simple) de tels polygones.

Il y a six surfaces sur lesquelles on peut trouver une infinité de quadrilatères inscrits à une biquadratique φ_4[817]); ce sont les éléments doubles d'une involution du quatrième ordre des surfaces[818]) du faisceau; *ces six surfaces constituent le covariant sextique des quatre cônes du faisceau.*

145. Transformation des biquadratiques φ_4. Deux biquadratiques φ_4 sont collinéaires si elles ont le même module[819]) [cf. n° **134**]. Une biquadratique φ_4 et, en même temps le faisceau ponctuel de quadri-

815) *A. Harnack,* Math. Ann. 12 (1877), p. 69; *A. Ameseder,* Sitzgsb. Akad. Wien 87 II (1883), p. 1179; *H. Schröter,* Raumkurven 4. Ordnung[772]), p. 18; *G. Loria,* Atti R. Accad. Lincei, *Rendic.* (4) 6 II (1890), p. 183; *Cl. Servais,* Annaes Porto[802]) 8 (1913), p. 172/83.*

816) Le théorème d'Abel a servi à la démonstration de ces théorèmes de fermeture établis par *A. Clebsch,* J. reine angew. Math. 63 (1864), p. 239; *G. Westphal,* Math. Ann. 13 (1878), p. 16; *G. Darboux,* Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires, Paris 1873, p. 105; *Th. Moutard,* Nouv. Ann. math. (2) 3 (1864), p. 539; voir aussi des cas particuliers dans *O. Staude,* Math. Ann. 21 (1883), p. 252. Divers résultats ont été établis synthétiquement par *F. August,* Archiv Math. Phys. (1) 59 (1876), p. 1; *F. Schur,* Math. Ann. 20 (1882), p. 264; *V. Eberhardt,* Z. Math. Phys. 32 (1887), p. 65; cf. *J. Steiner,* J. reine angew. Math. 32 (1846), p. 184; Werke 2, Berlin 1882, p. 373; *Cl. Servais,* Annaes Porto[802]) 8 (1913), p. 174.*

817) Ces six surfaces ont été obtenues par différents procédés par *E. N. Laguerre,* J. math. pures appl. (2) 15 (1870), p. 193; *Œuvres 2, Paris 1905, p. 149;* *A. Voss,* Math. Ann. 10 (1876), p. 177, qui considère également des quadrilatères situés sur une quadrique, les diagonales étant sur une autre quadrique du faisceau; *A. Harnack,* Math. Ann. 12 (1877), p. 74; *G. Westphal,* Math. Ann. 13 (1878), p. 16; *A. Ameseder,* Sitzgsb. Akad. Wien 87 II (1883), p. 1194 (octogones inscrits, p. 1213); *H. Schröter,* Raumkurven 4. Ordnung[772]), p. 69; *J. C. Kluyver,* Amer. J. math. 19 (1897), p. 319; *M. Stuyvaert,* Mém. Soc. sc. Liége (3) 7 (1907), mém. n° 2, p. 183/90; *Cl. Servais,* Annaes Porto[802]) 8 (1913), p. 151/7, 176.*

818) *J. Maillard de la Gournerie,* J. math. pures appl. (2) 15 (1870), p. 264; *Cl. Servais* [Annaes Porto[802]) 8 (1913), p. 174] démontre que, parmi les surfaces du faisceau, il y a 16 hyperboloïdes qui jouissent de la propriété d'être le support d'hexagones inscrits dans la biquadratique.*

819) *A. Harnack,* Math. Ann. 12 (1877), p. 47.

ques dont φ_4 est la courbe fondamentale, restent inaltérés par 32 collinéations. Elles correspondent au changement du paramètre u en $\pm u + c$, où

$$4c \equiv 0 \quad (\text{modd. } 2\omega_1,\ 2\omega_2).$$

Parmi ces collinéations il y a quatre homologies involutives, dont le centre et le plan sont un sommet et la face opposée du tétraèdre conjugué du faisceau; il y a également les trois involutions gauches, dont les axes sont deux arêtes opposées de ce tétraèdre[820]).

Il existe d'autres transformations univoques, mais qui ne sont pas des collinéations, qui conservent des surfaces quadricuspidales isolées [n° **135**][821]).

146. Projection stéréographique. Si l'on représente une surface du second degré sur un plan par une projection stéréographique [n° **92**], une biquadratique φ_4 tracée sur cette surface a pour image une courbe plane du quatrième ordre qui possède deux points doubles, correspondant aux deux génératrices rectilignes qui passent par le point de vue; *une biquadratique φ_4' et une biquadratique φ_4'' ont pour image une courbe ayant trois points doubles; les images peuvent être, par un choix convenable du point de vue, réduites à des cubiques ou des coniques.* Une quartique de seconde espèce a, au contraire, pour image dans le cas général une courbe du quatrième degré ayant un point triple[822]).

147. Réalité et forme des biquadratiques. Les biquadratiques φ_4 peuvent être rangées en quatre catégories, qui se distinguent les unes des autres par le nombre des éléments réels qui caractérisent les faisceaux de quadriques [n° **102**]:

820) *A. Harnack,* Math. Ann. 12 (1877), p. 81; *F. Schur,* Math. Ann. 20 (1882), p. 262; voir aussi *H. Schröter* [Math. Ann. 20 (1882), p. 243] qui étudie deux espaces *se correspondant dans une projectivité cyclique du quatrième ordre;* *H. E. Timerding* [Ann. mat. pura appl. (3) 1 (1898), p. 95] considère la transformation quadratique d'une droite en une biquadratique φ_4. Sur les transformations des biquadratiques φ_4'', voir *H. A. Schwarz,* J. reine angew. Math. 64 (1865), p. 7; Math. Abh. 2, Berlin 1890, p. 14. Sur les transformations des quartiques de seconde espèce en elles-mêmes, voir *K. Rohn,* Ber. Ges. Lpz. 42 (1890), p. 212; *Cl. Servais* [Annaes Porto[802]) 8 (1913), p. 146/71] a étudié géométriquement les 32 collinéations qui conservent une biquadratique φ_4.*

821) *A. Harnack,* Math. Ann. 12 (1877), p. 81.

822) *J. Plücker,* J. reine angew. Math. 34 (1847), p. 341; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 417; *M. Chasles,* C. R. Acad. sc. Paris 53 (1861), p. 767; *A. Cayley,* London Edinb. Dublin philos. mag. (4) 25 (1863), p. 350; Papers 5, Cambridge 1892, p. 106; *A. Clebsch,* Geom.[105]) 2¹, p. 421.

I) quatre points fondamentaux réels, quatre cônes réels;
II) quatre points fondamentaux réels, deux cônes réels;
III) deux points fondamentaux réels, deux cônes réels;
IV) aucun point fondamental réel, aucun cône réel[823]).

148. Biquadratiques particulières. On appelle *courbes cycliques* les intersections d'une quadrique et d'une sphère; elles ont été étudiées par *G. Lamé*[824]), *G. Darboux*[825]), *M. Chasles*[826]), *E. N. Laguerre*[827]).

A ces courbes, appartiennent les *coniques sphériques*[828]) et la courbe

823) La première recherche sur l'énumération des formes remonte à *J. N. P. Hachette,* Correspondance sur l'Éc. polyt. 1 (1804/8), p. 370. La classification précédente fut donnée simultanément par *R. Sturm,* Flächen dritter Ordnung[175]), p. 264, 304; *L. Cremona,* J. reine angew. Math. 68 (1868), p. 124; *L. F. Painvin,* Nouv. Ann. math. (2) 7 (1868), p. 481, 529; (2) 8 (1869), p. 49; cf. *W. Killing,* Diss. Berlin 1872, p. 15; *G. Darboux,* Classe remarquable[816]), p. 29; *J. Caron,* Nouv. Ann. math. (2) 12 (1873), p. 270; *H. G. Zeuthen,* Om flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit, Universitetsfestskrift, Copenhague 1879. Sur les types des biquadratiques φ_4' et des biquadratiques φ_4'', voir *W. Killing,* Diss. Berlin 1872, p. 29. La représentation des quartiques au moyen des procédés fournis par la géométrie descriptive a permis de mieux connaître les diverses formes que peut prendre une quartique; voir à ce sujet *W. Fiedler,* Darstellende Geometrie, (3ᵉ éd.) 2, Leipzig 1885, p. 104/15; *Chr. Wiener,* Lehrbuch der darstellenden Geometrie 2, Leipzig 1887, p. 285. En 1889, *H. Wiener* a construit des modèles en fils qui permettent de représenter les quartiques [voir à ce sujet *W. von Dyck,* Katalog[149]), p. 269.

824) *Amédée François Frézier,* La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, pour la construction des voûtes et autres parties des bâtiments civils et militaires, ou Traité de stéréométrie à l'usage de l'architecture 1, Strasbourg 1737; 2, Strasbourg 1738; 3, Strasbourg 1739; *G. Lamé,* Examen[44]), p. 36.

825) *G. Darboux,* Nouv. Ann. math. (2) 3 (1864), p. 199; Classe remarquable[816]) p. 399.

826) *M. Chasles,* J. math. pures appl. (1) 3 (1838), p. 434.

827) *E. N. Laguerre,* Bull. Soc. philom. Paris (6) fasc. 4 (1867), p. 51; (6) fasc. 5 (1868), p. 40; Œuvres 2, Paris 1905, p. 39/41, 46/53. Cf. *R. Townsend,* Cambr. Dublin math. J. 4 (1849), p. 66; *H. Hilton,* Proc. London math. Soc. (2) 1 (1904), p. 267/82; (2) 2 (1905), p. 150/60.*

828) Le nom a été donné par *L. I. Magnus,* Ann. math. pures appl. 16 (1825/6), p. 33; Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 2, p. 202; cf. *M. Chasles,* J. math. pures appl. (1) 1 (1836), p. 329; *J. Steiner,* Werke 1, Berlin 1881, p. 117; *M. Chasles,* C. R. Acad. sc. Paris 50 (1860), p. 623/33; J. math. pures appl. (2) 5 (1860), p. 425; *Borgnet,* Nouv. Ann. math. (1) 7 (1848), p. 147, 174; *Vansson* id. (1) 19 (1860), p. 197; *H. Heilermann,* Z. Math. Phys. 6 (1861), p. 153, 326; *W. Fiedler,* Z. Math. Phys. 7 (1862), p. 33, 225; *G. Huber,* Z. Math. Phys. 45 (1900), p. 86; *C. Rodenberg,* Z. Math. Phys. 47 (1902), p. 196; *F. Gomes Teixeira,* Annaes scientificos da academia polytechnica do Porto 3 (1908), p. 28; *S. Cámara,* Anales de la Facultad de Ciencias de Zaragoza 3 (1909), p. 1/61.*

de Viviani[829]). *H. Schröter*[830]) a étudié également une courbe particulière définie de la manière suivante: si, par chaque couple d'arêtes opposées d'un tétraèdre, on fait passer un hyperboloïde orthogonal, les trois surfaces ainsi obtenues ont en commun une biquadratique φ_4, qui est coupée par un plan quelconque perpendiculaire à une arête du tétraèdre en quatre points situés sur un cercle.

Rappelons comme quartiques particulières les lignes de courbure d'une quadrique, intersections de cette surface avec des surfaces homofocales [n° **83**].

Réseaux de quadriques.

149. Notion de réseau. La notion de réseau de quadriques se rencontre pour la première fois dans *G. Lamé*[831]): si trois quadriques

$$f = 0, \quad g = 0, \quad h = 0$$

ne font pas partie d'un faisceau ponctuel, l'ensemble des quadriques représentées par l'équation

$$\lambda f + \mu g + \nu h = 0$$

constitue un réseau ponctuel de quadriques; toutes ces surfaces passent par les *huit points communs aux trois surfaces données*; *ces huit points peuvent d'ailleurs ne pas être distincts.*

G. Lamé[832]) a établi que ces huit points ne peuvent être choisis arbitrairement; la connaissance de sept d'entre eux suffit à déterminer le huitième. Ce théorème a été précisé par les recherches de *J. Plücker*[833]) sur les relations qui lient les points communs à trois surfaces d'ordre n (paradoxe de Cramer). Des cas particuliers ont été étudiés simultané-

829) *G. Darboux*, Classe remarquable[816]), p. 27.

830) *H. Schröter*, J. reine angew. Math. 93 (1882), p. 132; *H. Thieme*, Z. Math. Phys. 27 (1882), p. 56; *W. Stahl* [Jahrb. Fortschr. Math. 14 (1882), éd. 1885, p. 567] a montré que toute biquadratique φ_4 pouvait se transformer par une collinéation en une courbe de *H. Schröter*; **J. Neuberg*, Archiv Math. Phys. (3) 14 (1909), p. 200.*

831) Examen[44]), p. 29, 37. **O. Chemin* [Géom. de position[207]) 2, p. 246] dit *gerbe* de quadriques au lieu de *réseau* de quadriques, ce qui correspond exactement à la terminologie actuellement en usage en Allemagne où l'on désigne effectivement sous le nom de „Flächenbündel" ce que nous appelons „réseaux de surfaces".* C'est depuis *R. Sturm* qu'on a remplacé en Allemagne le nom primitif de réseau (*Netz*) par celui de gerbe (*Bündel*) [*R. Sturm*, Flächen dritter Ordnung[175]), p. 37; J. reine angew. Math. 70 (1869), p. 212].

832) Examen[44]), p. 38.

833) Ann. math. pures appl. 19 (1828/9), p. 129; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 83; cf. *J. D. Gergonne*, Ann. math. pures appl. 17 (1826/7), p. 214; *A. Brill* et *M. Nöther*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 3 (1892/3), éd. 1894, p. 289.

ment par un auteur inconnu[834]), par *J. Steiner*[835]) (qui a donné aussi les théorèmes corrélatifs) et par *J. D. Gergonne*[836]); *L. O. Hesse*[837]) et *L. I. Magnus*[838]) se sont occupés d'une façon approfondie du théorème général relatif aux quadriques.

Une conséquence immédiate de cette proposition est la définition d'un réseau ponctuel de quadriques comme ensemble des quadriques passant par *sept points*[839]). *K. G. Chr. von Staudt*[840]) a examiné les différents cas où sept points donnés doivent être considérés comme non indépendants relativement aux systèmes de quadriques *(trois peuvent être en ligne droite, six sur une conique, etc).*

J Plücker[841]) a montré, dans des cas particuliers, *M. Chasles*[842]) et *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières*[843]) ont établi dans le cas général, que l'on peut, pour déterminer un réseau ponctuel de quadriques, remplacer les sept points par sept couples de points conjugués.

Un réseau étant un système linéaire à deux paramètres, il en résulte qu'une quadrique du réseau ponctuel est déterminée par deux points donnés arbitrairement, *pourvu toutefois que ces points ne déterminent pas un faisceau, auquel cas ces points appartiennent à une quartique qui contient les huit premiers.*

Th. Reye[844]) appelle *Scharschar* le réseau tangentiel de quadriques, formé des quadriques tangentes à sept plans.

Les quartiques qui passent par sept points constituent dans l'espace un *réseau de quartiques*; les courbes de ce réseau qui appartiennent à une même quadrique forment un *faisceau de quartiques*. *R. Sturm*[845]) a étudié, par voie synthétique, les réseaux de quadriques[846]) ainsi que les réseaux et les faisceaux de quartiques[847]).

834) *Anonyme*, J. reine angew. Math. 3 (1828), p. 199.

835) Id. 3 (1828), p. 205; Werke 1, Berlin 1881, p. 171.

836) Ann. math. pures appl. 19 (1828/9), p. 133.

837) J. reine angew. Math. 20 (1840), p. 297; Werke, Munich 1897, p. 37.

838) Aufgaben aus der analyt. Geom.[27]) 2, p. 287.

839) *J. Plücker*, Ann. math. pures appl. 19 (1828/9), p. 133; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 86.

840) Beiträge[334]), fasc. 3, Nuremberg 1860, p. 367.

841) Ann. math. pures appl. 19 (1828/9), p. 137; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 88.

842) C. R. Acad. sc. Paris 52 (1861), p. 1157.

843) J. math. pures appl. (2) 7 (1862), p. 412.

844) J. reine angew. Math. 82 (1877), p. 71. Un réseau tangentiel particulier a été étudié par *J. Druxes*, Diss. Strasbourg 1896.

845) J. reine angew. Math. 70 (1869), p. 212; Math. Ann. 1 (1869), p. 550.

846) Les théorèmes essentiels concernant les réseaux ont été démontrés ana-

150. Réseau de quadriques coupé par un plan ou une droite. Le réseau de coniques, déterminé sur un plan par un réseau de quadriques, a été étudié synthétiquement par *R. Sturm*[847a]).

*Le lieu des points de contact d'un plan et des quadriques du réseau est une courbe du troisième ordre.

*Cette courbe du troisième ordre est aussi le lieu des points doubles des coniques dégénérées contenues dans le réseau des coniques situées à l'intersection du plan envisagé et des quadriques du réseau. C'est donc la hessienne [III 18, **32**] de ce réseau de coniques.

Une droite quelconque est tangente[847]) en chacun de ses points à une quadrique d'un réseau *ou est située sur une quadrique du réseau;* si une droite n'est pas génératrice d'une quadrique, les surfaces qui la touchent enveloppent une surface de quatrième ordre.*

Les génératrices rectilignes de toutes les quadriques du réseau forment un complexe du troisième ordre, qui a été étudié par *R. Sturm*[848]), *G. Darboux*[849]), *Th. Reye*[850]) et *J. Monterano*[850a]); *dans certains cas, ce complexe peut se décomposer en un complexe linéaire et un complexe tétraédral.*

151. Polarité relative à un réseau. *G. Lamé*[851]) a montré dans un cas particulier que les plans polaires d'un point P par rapport aux quadriques d'un réseau passent tous par un point P', résultat qu'ont complété *J. Plücker*[852]) et *E. Bobillier*[853]); les points P et P' sont dits points conjugués par rapport au réseau (*zugeordnete Pole* ou *konjugierte Punkte*)[854]).

La correspondance polaire relative à un réseau ponctuel de qua-

---

lytiquement par *S. Gundelfinger* [*G. Salmon*, trad. par *W. Fiedler*, Analytische Geometrie des Raumes, (2ᵉ éd.) 1, Leipzig 1874; (4ᵉ éd.) 1, Leipzig 1898, p. 410].

847) *R. Sturm*, J. reine angew. Math. 70 (1869), p. 214/5.

847a) Id. p. 215.

848) Id. p. 213.

849) Bull. sc. math. (1) 1 (1870), p. 351.

850) J. reine angew. Math. 82 (1877), p. 73. *A. R. Johnson* [Math. Quest. Educ. Times (Londres) 54 (1890), p. 64/6] a recherché la surface formée par les tangentes communes à trois quadriques.

850a) *Memorie Ist. Bologna (5) 3 (1893), p. 549.*

851) Examen[44]), p. 38; cf. *E. Bobillier*, Ann. math. pures appl. 17 (1826/7), p. 360; *J. Steiner*, J. reine angew. Math. 3 (1828), p. 206; Werke 1, Berlin 1881, p. 173.

852) Ann. math. pures appl. 19 (1828/9), p. 137; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 88.

853) Ann. math. pures appl. 18 (1827/8), p. 268. Cf. *L. O. Hesse* [J. reine angew. Math. 24 (1842), p. 37; Werke, Munich 1897, p. 52] qui utilise ce théorème pour construire une quadrique passant par neuf points.

854) *J. Steiner*, Syst Entw.[85]), p. 163; Werke 1, Berlin 1881, p. 350; *L. O. Hesse*, J. reine angew. Math. 24 (1842), p. 38; Werke, Munich 1897, p. 53.

driques conduit aux courbes gauches et aux surfaces du troisième ordre. Les conjugués des points d'une droite sont en général sur une cubique gauche[855]) dont les cordes sont les droites conjuguées (polaires réciproques) de la droite donnée par rapport aux quadriques du réseau.

La droite qui unit deux points P et P' est située sur une quadrique du réseau et les surfaces du réseau déterminent sur cette droite une involution dont P et P' sont les points doubles.

Les conjugués des différents points d'un plan forment une surface du troisième ordre[856]), *qui contient les pôles du plan par rapport aux quadriques du réseau ainsi que les sommets des cônes du réseau.*

152. La courbe nodale du réseau. Le lieu des points dont les plans polaires par rapport aux quadriques du réseau se coupent suivant une droite est une courbe du sixième ordre. Elle est aussi le lieu des sommets des cônes du réseau et celui des sommets des tétraèdres conjugués des faisceaux contenus dans le réseau. On l'appelle la *courbe nodale* (quelquefois aussi la „courbe jacobienne") du réseau.

La courbe nodale fut étudiée d'abord par *L. O. Hesse*[857]), qui remarqua qu'elle correspond d'une façon univoque à la courbe plane générale du quatrième ordre; il l'utilisa pour résoudre le problème de la recherche des tangentes doubles de cette dernière. *R. Sturm*[858]) en fit une étude synthétique, détermina son rang, sa classe et étudia ses singularités. *Cette courbe admet des cordes qui la rencontrent en trois points; ce sont les droites intersections des plans polaires d'un point de la courbe; par chaque point de la courbe, passent en général, trois pareilles droites.*

153. Le système des huit points associés. La dépendance des huit points d'intersection de trois quadriques [nᵒ **149**] se retrouve

---

855) *R. Sturm*, Flächen 3. Ordnung[175]), p. 32; **Th. Reye*, Geom. der Lage, (3ᵉ éd.) 3, Leipzig 1892, p. 136; trad. *O. Chemin*[207]) 2, p. 247.*

856) *L. O. Hesse*, J. reine angew. Math. 49 (1855), p. 279; Werke, Munich 1897, p. 346; *J. Steiner*, J. reine angew. Math. 53 (1857), p. 134; Werke 2, Berlin 1882, p. 653; *R. Sturm*, Flächen 3. Ordnung[175]), p. 28; *C. F. Geiser*, J. reine angew. Math. 69 (1868), p. 197; **Th. Reye*, Geom. der Lage, (3ᵉ éd.) 3, Leipzig 1892, p. 137; trad. *O. Chemin*[207]) 2, p. 249.*

857) J. reine angew. Math. 49 (1855), p. 282; Werke, Munich 1897, p. 349.

858) Flächen dritter Ordnung[175]), p. 37, 322; Math. Ann. 1 (1869), p. 554; J. reine angew. Math. 70 (1869), p. 223. D'autres recherches relatives à cette courbe sont dues à *M. Chasles*, C. R. Acad. sc. Paris 52 (1861), p. 1157; *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières*, J. math. pures appl. (2) 7 (1862), p. 412; *C. F. Geiser*, J. reine angew. Math. 69 (1868), p. 197, 218; *G. Darboux*, Bull. sc. math. (1) 1 (1870), p. 352; *A. Cayley*, The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger math. 5 (1871), p. 200; Papers 8, Cambridge 1895, p. 414; *W. Stahl*, J. reine angew. Math. 92 (1882), p. 180; **Th. Reye*, Geom. der Lage, (3ᵉ éd.) 3, Leipzig 1892, p. 138/9; trad. *O. Chemin*[207]) 2, p. 250; *M. Stuyvaert*, Mém. Soc. sc. Liége (3) 7 (1907), mém. nᵒ 2, p. 34.*

dans différentes propriétés géométriques, qui peuvent être utilisées pour construire le huitième point quand on connaît les sept autres; on désigne l'ensemble de ces huit points sous le nom de *système des huit points associés.*

L. O. Hesse[859]) a le premier établi que les sommets de deux tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique sont huit points associés et que, réciproquement, étant donnés huit points associés, on peut les considérer comme sommets de deux tétraèdres conjugués par rapport à une surface du second degré et cela, quelle que soit la façon dont on les associe quatre à quatre.

Une étude synthétique de la question a été faite par *K. G. Chr. von Staudt*[860]), *qui examina les différents cas particuliers qui peuvent se présenter, quand quatre de ces points ne forment pas un véritable tétraèdre.*

P. Serret[861]) a, d'une façon analogue, partagé les huit points associés en un pentaèdre polaire et un triangle conjugué par rapport à une surface singulière de seconde classe.

L. O. Hesse[862]) a donné un théorème analogue au théorème de Pascal relatif aux coniques, ce théorème se rapportant aux huit points associés; *T. Weddle*[863]) et *H. G. Zeuthen*[864]) ont donné à cette proposition de *L. O. Hesse* la forme définitive suivante[865]): les droites

859) *L. O. Hesse* [J. reine angew. Math. 20 (1840), p. 297; Werke, Munich 1897, p. 36; Analyt. Geom. des Raumes[16]), (3e éd.) p. 197] a donné le théorème; il a aussi donné [cf. Werke, p. 46] la construction correspondante du huitième point; cf. *H. Schröter,* J. reine angew. Math. 99 (1886), p. 131; **K. Rohn,* Ber. Ges. Lpz. 53 (1901), math. p. 492; **Cl. Servais,* Acad. Belgique, classe sc. Mém. in 8°, (2) 1 (1904/6), mém. n° 2, p. 50/3;* *W. Burnside* [Messenger math. (2) 33 (1903/4), p. 127/8] donne les coordonnées du huitième point en fonction de celles des sept autres. Extension à l'hyperespace par *M. Stuyvaert,* Reale Ist. Lombardo, Rendic. (2) 44 (1911), p. 319/20.*

860) Beiträge[384]), fasc. 3, Nuremberg 1860, p. 373.

861) Géom. de direction[14]), p. 317; il construit le huitième point.

862) J. reine angew. Math. 20 (1840), p. 307; Werke, Munich 1897, p. 49 (la construction qui s'y rattache se trouve p. 47); J. reine angew. Math. 26 (1843), p. 152; Werke, p. 80; J. reine angew. Math. 45 (1853), p. 101; Werke, p. 316; J. reine angew. Math. 73 (1871), p. 371; Werke, p. 561; J. reine angew. Math. 85 (1878), p. 304; Werke, p. 651; J. reine angew. Math. 99 (1886), p. 127; Werke, p. 680.

863) Cambr. Dublin math. J. 5 (1850), p. 58, 234 (où est énoncé le théorème corrélatif du théorème cité, etc.).

864) Acta math. 12 (1888/9), p. 362.

865) Des recherches plus approfondies sont dues à *H. Dobriner,* Acta math. 12 (1888/9), p. 339. Sur le théorème sous la forme donnée ici, cf. *A. Buchheim,* Messenger math. (2) 14 (1884/5), p. 74; *H. Schröter,* Acta math. 14 (1890/1), p. 207. Sur la construction correspondante, cf. *F. Caspary,* J. reine angew. Math. 99 (1886), p. 128 [1885].

d'intersection des couples de plans

$$123,\ 567;\quad 234,\ 678;\quad 345,\ 781;\quad 456,\ 812$$

sont sur un même hyperboloïde.

Enfin *L. O. Hesse*[866]) a montré que la cubique gauche qui passe par six des huit points associés admet comme corde la droite qui joint les deux derniers points associés. La dépendance des points associés conduit à cette conséquence que six points étant fixés, le déplacement du huitième résulte de celui du septième; la relation entre ces déplacements a fait l'objet de recherches de *C. F. Geiser*[867]) et *R. Sturm*[868]).

Au problème de la construction du huitième point associé[868a]), connaissant les sept autres, se rattachent, d'une part, la détermination du neuvième point commun à deux cubiques planes dont on connaît huit points communs[869]), d'autre part, la théorie de l'intersection d'un couple de droites avec une courbe plane du quatrième ordre[870]).

154. Réseaux spéciaux. Il n'existe pas, en général, de pentagone conjugué par rapport à trois quadriques; mais, s'il en existe un, il y en a une infinité, comme l'a montré *G. Darboux*[871]).

W. Frahm[872]) et *E. Toeplitz*[873]) ont donné comme condition nécessaire et suffisante, pour qu'il en soit ainsi, que les trois quadriques soient les premières polaires de trois points par rapport à une même surface du troisième ordre; ces quadriques déterminent alors un réseau de surfaces du second ordre admettant un pentagone conjugué commun[874]).

Si les sept points qui déterminent le réseau appartiennent à une même cubique, toutes les quadriques du réseau contiennent cette

866) J. reine angew. Math. 26 (1843), p. 147; Werke, Munich 1897, p. 79. Sur la construction correspondante, cf. *K. G. Chr. von Staudt,* Beiträge[58]), fasc. 3, p. 366; *Th. Reye,* Ann. mat. pura appl. (2) 2 (1869), p. 130; *H. Müller,* Math. Ann. 1 (1869), p. 409. D'autres constructions ont été indiquées par *L. D. H. Picquet,* J. reine angew. Math. 73 (1871), p. 365; 99 (1886), p. 230; *H. G. Zeuthen,* Math. Ann. 18 (1881), p. 33; *R. Sturm,* J. reine angew. Math. 99 (1886), p. 317; *H. G. Zeuthen,* id. p. 320.

867) J. reine angew. Math. 67 (1867), p. 88.

868) Math. Ann. 1 (1869), p. 558. Cf. *V. Eberhard,* Diss. Breslau 1885.

868a) Au sujet de la construction du huitième point, cf. *K. Rohn,* Ber. Ges. Lpz. 53 (1901), math. p. 492. On trouvera dans ce mémoire de nombreux renseignements bibliographiques concernant cette construction.

869) *J. H. Engel,* Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 34 (1889), p. 299; *L. D. H. Picquet,* Bull. Soc. math. France 22 (1894), p. 19.

870) *L. O. Hesse,* J. reine angew. Math. 49 (1855), p. 289; Werke, Munich 1897, p. 355.

871) Bull. sc. math. (1) 1 (1870), p. 353.

872) Math. Ann. 7 (1874), p. 635.

873) Diss. Breslau 1876; Math. Ann. 11 (1877), p. 434.

cubique et constituent un réseau ayant une courbe fondamentale du troisième ordre[875]) [cf. n° **113**]. Le complexe (du troisième ordre) des génératrices [n° **150**] des quadriques du réseau se réduit alors au complexe des droites rencontrant la cubique envisagée.

Trois hyperboloïdes, qui ont une génératrice commune, se coupent en quatre points. En général aucun de ces points n'est situé sur la génératrice; ils déterminent un réseau ayant une droite et quatre points fondamentaux[876]); *un tel réseau peut être défini par une droite quelconque et quatre points quelconques; il contient quatre couples de plans; la courbe nodale [n° **152**] est formée des droites doubles de ces couples de plans et de la droite fondamentale.*

Trois quadriques, qui ont en commun une conique et deux points, déterminent un réseau spécial, dont un cas particulier est le réseau ou congruence de sphères[877]), au sens restreint du n° **170**.

Systèmes linéaires à trois paramètres.

155. Définition. Si

$$f = 0,\; g = 0,\; h = 0,\; k = 0$$

sont les équations de quatre quadriques, qui n'appartiennent pas à un réseau, l'ensemble (de multiplicité 3) des surfaces représentées par l'équation

$$f + \lambda g + \mu h + \nu k = 0$$

constitue un système linéaire de quadriques à trois paramètres. *Les auteurs allemands le désignent sous le nom de *Gebüsch*, que *O. Chemin* traduit par *réseau*[878]).*

874) Cf. *Th. Reye*, J. reine angew. Math. 82 (1877), p. 75; *R. Townsend*, Quart. J. pure appl. math. 11 (1871), p. 347; *J. H. Graf*, Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli, Berne 1896, p. 95.

875) *C. F. Geiser*, J. reine angew. Math. 69 (1868), p. 215; *R. Sturm*, id. 70 (1869), p. 238; *J. Cardinaal*, id. 101 (1887), p. 142; *Th. Reye*, Geom. der Lage[307]), (3e éd.) 2, p. 221; (4e éd.) 2, p. 181; trad. *O. Chemin*[207]) 2, p. 122. D'après *R. Sturm* [Liniengeometrie[195]) 1, p. 252] la courbe fondamentale peut se décomposer en trois droites.

876) *M. Chasles*, J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 402; C. R. Acad. sc. Paris 45 (1857), p. 194; *R. Sturm*, Math. Ann. 1 (1869), p. 559; *Th. Reye*, Geom. der Lage[396]), (3e éd.) 3, p. 140; *trad. *O. Chemin*[207]) 2, p. 251.*

D'après *G. Darboux* [Bull. sc. math. (1) 1 (1870), p. 354] et *R. Sturm* [Liniengeometrie[195]) 1, p. 336] le complexe du troisième ordre [n° **150**] se décompose en un complexe tétraédral et un complexe linéaire; cf. *W. F. Meyer* [Archiv Math. Phys. (3) 5 (1903), p. 168] qui considère le réseau dont les points fondamentaux sont les centres des sphères inscrites et exinscrites à un tétraèdre.

877) *Th. Reye*, Synth. Geom. der Kugeln[342]), p. 21, 79.

878) **O. Chemin*, Géom. de position[207]) 2, p. 246/52. Cf. notes 831 et 881.*

Par un point de l'espace, passent une infinité de quadriques du système; ces quadriques forment un réseau; ce point fait partie d'un système de huit points associés du système de quadriques à trois paramètres. Par deux points donnés passent une infinité de quadriques, qui forment un faisceau; *si ces deux points n'appartiennent pas à un même système de huit points associés,* ils appartiennent à une quartique du système linéaire de quadriques. Par trois points, *qui ne sont pas situés sur une quartique du système linéaire de quadriques*, passe une seule quadrique de ce système.

Le système linéaire à trois paramètres s'est présenté dans les recherches de *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières*[879]), qui l'a défini au moyen de six couples de points conjugués. Il fut ensuite étudié par *R. Sturm*[880]), qui l'avait d'abord désigné sous le nom de „Netz" (réseau), puis plus tard sous le nom de „Gebüsch"[881]); il fit l'objet de recherches de *Th. Reye*[882]), qui s'occupa également du système linéaire tangentiel à trois paramètres qu'il appelle „Gewebe"[883]).

156. Polarité. *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières*[884]) a remarqué que les plans polaires de deux points par rapport aux quadriques du système sont des plans homologues de deux espaces collinéaires.

G. Darboux[885]), suivi par *Th. Reye*[886]), a étudié la correspondance par polarité; il a montré que les droites conjuguées (polaires réciproques) d'une droite fixe par rapport aux quadriques du système forment un complexe tétraédral.

157. Correspondance homographique entre le système à trois paramètres et l'espace planaire. *Th. Berner*[887]) a établi une correspondance homographique entre le système à trois paramètres et l'espace planaire, en faisant correspondre à toute quadrique du système le plan polaire d'un point fixe par rapport à cette quadrique.

A un réseau de quadriques ou un faisceau de quadriques appar-

879) J. math. pures appl. (2) 7 (1862), p. 412; cf. *L. Cremona*, J. reine angew. Math. 68 (1868), p. 11; *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie, Bologne 1866, p. 37;* trad. par *M. Curtze*, Grundzüge der allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung, Berlin 1870, p. 44.

880) Flächen dritter Ordnung[175]), p. 106.

881) *R. Sturm*, J. reine angew. Math. 70 (1869), p. 212.

882) Geom. der Lage[396]), (3e éd.) 3, p. 140; trad. *O. Chemin*[207]) 2, p. 252.

883) *Th. Reye*, J. reine angew. Math. 82 (1877), p. 5.

884) J. math. pures appl. (2) 7 (1862), p. 412.

885) Bull. sc. math. (1) 1 (1870), p. 354.

886) Geom. der Lage[396]), (3e éd.) 3, p. 141; *trad. *O. Chemin*[207]) 2, p. 253.

887) Diss. Berlin 1865.

tenant au système à trois paramètres correspond une gerbe de plans ou un faisceau de plans de cet espace planaire; à une quartique correspond ainsi une droite et à tout groupe de huit points associés correspond un point, intersection des trois plans qui correspondent aux trois quadriques définissant les huit points associés.

Th. Reye[888]) a approfondi les relations entre les éléments homologues.

158. Surface nodale. Le lieu des points P, dont les plans polaires par rapport aux quadriques du système à trois paramètres concourent en un même point Q, est une surface du quatrième ordre, signalée par *J. Steiner*[889]); on l'appelle la *surface nodale*[890]) (quelquefois aussi „surface jacobienne") du système[891]).

Les points P et Q appartiennent tous les deux à cette surface et sont dits *conjugués* par rapport au système de quadriques.

La surface nodale est aussi le lieu des sommets des cônes (multiplicité 2) qui appartiennent au système à trois paramètres.

L'équation de la surface nodale s'obtient en annulant le déterminant fonctionnel des fonctions f, g, h, k.

Un système à trois paramètres contient, d'après *Th. Reye*[892]), en général dix couples de plans, dont les droites doubles appartiennent à la surface nodale; **R. Bricard*[892a]) a recherché les systèmes dans lesquels il existe une infinité de couples de plans, ainsi que les systèmes tangentiels admettant une infinité de couples de points.*

Par la correspondance du n° **157**, aux cônes du système à trois paramètres correspondent, d'après *Th. Reye*[893]) dans l'espace planaire, les plans tangents à une surface de quatrième classe et de seizième ordre; aux sommets des cônes correspondent les points de contact de ces plans tangents; cette surface est la surface focale d'une congruence de droites du vingt-huitième ordre et de douzième classe.

888) Geom. der Lage[307]), (3e éd.) 2, p. 246; id.[396]), (3e éd.) 3, p. 142; *trad. *O. Chemin*[207]) 2, p. 253/4;* J. reine angew. Math. 86 (1879), p. 85; cf. *R. Sturm*, Liniengeometrie[195]) 2, p. 278.

889) Syst. Entw.[85]), p. 310 (problème 51); Werke 1, Berlin 1881, p. 450.

890) *J. Steiner*, J. reine angew. Math. 53 (1857), p. 138; Werke 2, Berlin 1882, p. 656.

891) **Th. Reye*, Geom. der Lage, (4e éd.) 3, Leipzig 1910, p. 146; trad. *O. Chemin*[207]) 2, p. 254/7.* Cf. *R. Sturm*, Flächen dritter Ordnung[175]), p. 108; *G. Darboux*, Bull. sc. math. (1) 1 (1870), p. 354; *Th. Reye* [J. reine angew. Math. 82 (1877), p. 76] s'est occupé de la surface nodale du système linéaire tangentiel à trois paramètres.

892) J. reine angew. Math. 86 (1879), p. 89.

892a) *Bull. Soc. math. France 34 (1906), p. 17/30.*

893) J. reine angew. Math. 86 (1879), p. 86.

159. Les rayons principaux. *Th. Reye*[894]) appelle *rayon principal* du système à trois paramètres une droite qui joint deux points faisant partie d'un groupe de huit points associés. Comme l'avait déjà remarqué *G. Darboux*[895]), sur un rayon principal, les quadriques du système déterminent une involution, dont les points doubles sont des points conjugués par rapport au système [n° **158**]; un rayon principal joint deux points conjugués et, réciproquement, toute droite qui joint deux points conjugués est un rayon principal.

La congruence des rayons principaux, signalée par *J. Steiner* à propos du problème indiqué au n° **158**, a été également mentionnée par *G. Darboux*[895]); *R. Sturm*[896]) en a déterminé l'ordre et la classe pour le système particulier de quadriques formé des premières polaires des points de l'espace par rapport à une surface donnée du troisième ordre [n° **163**].

Dans la correspondance du n° **157**, aux rayons principaux considérés comme appartenant au système de quadriques correspondent dans l'espace polaire des droites qui sont bitangentes à la surface focale [n° **158**]; *ce sont les seules droites du système de quadriques qui aient pour homologues, dans l'espace polaire, des droites; l'homologue d'une autre droite est une conique qui est en général tangente à la surface focale en quatre points[897]).*

160. Surface de Steiner. A un plan du système de quadriques correspond, comme l'a remarqué *Th. Reye*[898]), une surface de Steiner, de quatrième ordre et de troisième classe; la correspondance est, en général, univoque entre les points du plan et ceux de la surface. *Cette surface admet une infinité de coniques (multiplicité d'ordre 2); ces coniques sont deux à deux dans un plan tangent à la surface elle admet au moins une et au plus trois droites doubles; ces droites se coupent en un point triple de la surface; elle admet, en général, quatre plans tangents singuliers, qui la touchent chacun suivant une

894) J. reine angew. Math. 86 (1879), p. 86; cf. *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie 2, Leipzig 1893, p. 278; *Th. Reye*, Geom.[396]), (3e éd.) 3, p. 144; *trad. *O. Chemin*[207]) 2, p. 255.*

895) Bull. sc. math. (1) 1 (1870), p. 354; **Th. Reye*, Geom. der Lage[396]), (3e éd.) 3, p. 144; trad. *O. Chemin*[207]) 2, p. 255.*

896) Flächen dritter Ordnung[175]), p. 139; cf. *Th. Reye*, Geom. der Lage[396]), (3e éd.) 3, p. 148; trad. *O. Chemin*[207]) 2, p. 259.

897) *Th. Reye*, Geom. der Lage[396]), (3e éd.) 3, p. 145; *trad. *O. Chemin*[207]) 2, p. 256/7.*

898) *Th. Reye*, Geom. der Lage[307]), (1re éd.) 2, p. 246; J. reine angew. Math. 86 (1879), p. 89; **Th. Reye*, Geom. der Lage[396]), (3e éd.) 3, p. 147/51; trad. *O. Chemin*[207]) 2, p. 258/61.*

conique; elle est tangente à la surface focale [n° **158**] le long d'une courbe gauche du huitième ordre.*

161. Système de quadriques à trois paramètres ayant un ou plusieurs points communs. Si toutes les quadriques d'un système à trois paramètres ont un point commun, il appartient à un groupe de huit points associés et toute droite qui passe par ce point est un rayon principal. Ce point est un point conique de la surface nodale *et le cône des tangentes en ce point est un cône du système de quadriques.* *Th. Reye*[899]) a étudié d'une manière approfondie ces systèmes particuliers et a recherché ce que devenaient la surface focale [n° **158**] et la surface de Steiner correspondantes.

162. Système de quadriques à trois paramètres ayant six points communs. Un système à trois paramètres ne peut avoir plus de six points communs; le cas où il y a effectivement six points communs a été étudié par *R. Sturm*[900]) en se plaçant au point de vue de la correspondance homographique, et par *Th. Reye*[901]).

J. D. Gergonne[902]) avait déjà attiré l'attention sur la surface nodale d'un tel système en posant le problème de la recherche du lieu des sommets des cônes du second degré qui passent par six points. *M. Chasles*[903]) avait indiqué que le lieu est une courbe du troisième ordre, résultat inexact ainsi que l'a montré *A. Weddle*[904]). *Le lieu est une surface du quatrième ordre.*

L'équation de la surface nodale a été donnée par *A. Cayley*[905]) et *C. A. Drach*[906]). Des recherches analytiques ultérieures sont dues à *C. Hierholzer*[907]) et *J. (E.) Hunyady*[908]), tandis que *C. F. Geiser*[909]) et *R. Sturm*[910]) ont étudié la question au point de vue synthétique,

---

899) *Th. Reye,* Geom. der Lage[396]), (3e éd.) 3, p. 152; trad. *O. Chemin*[207]) 2, p. 262/8; J. reine angew. Math. 86 (1879), p. 90.

900) Math. Ann. 1 (1869) p. 554.

901) Geom. der Lage[396]), (3e éd.) 3, p. 158; *trad. *O. Chemin*[207]) 2, p. 268/78.*

902) Ann. math. pures appl. 18 (1827/8), p. 184.

903) Aperçu hist.[41]), p. 403; cf. *L. Cremona*, Ann. mat. pura appl. (1) 1 (1858), p. 168.

904) Cambr. Dublin math. J. 5 (1850), p. 69; cf. *E. N. Laguerre,* Bull. Soc. math. France 1 (1872/3), p. 71; *Œuvres 2, Paris 1905, p. 341/6.*

905) C. R. Acad. sc. Paris 52 (1861), p. 1216; Papers 5, Cambridge 1892, p. 4.

906) Einleitung in die Theorie der kubischen Kegelschnitte, Leipzig 1867, p. 34.

907) Math. Ann. 2 (1870), p. 563; 4 (1871), p. 172.

908) J. reine angew. Math. 92 (1882), p. 304; *F. Caspary,* Bull. sc. math. (2) 13 (1889), p. 221.

909) J. reine angew. Math. 67 (1867), p. 89.

910) Math. Ann. 1 (1869), p. 554.

F. Schottky[911]), *F. Caspary*[912]) et *G. Humbert*[913]) ont fait usage pour sa représentation des fonctions thêta à deux variables; **H. F. Baker*[914]) utilise l'espace à quatre dimensions pour l'étude de cette surface.*

Cette surface nodale contient les quinze droites qui joignent les six points pris deux à deux ainsi que les droites doubles des dix couples de plans définis par ces points; elle contient la cubique définie par les six points; cette cubique a pour cordes des rayons principaux, qui sont divisés harmoniquement par la surface nodale.

*Aux rayons principaux issus de chacun des points communs correspondent des droites doublement tangentes à une surface du quatrième ordre [n° **159**];* les droites doublement tangentes qui correspondent à un des points communs forment une congruence du second ordre et de seconde classe, dont la surface focale est une surface de Kummer (de quatrième classe et quatrième ordre); *les droites qui correspondent aux autres points sont tangentes à la même surface de Kummer[915]).* *Cette surface de Kummer admet seize points doubles et seize plans singuliers, chaque plan singulier contenant six points doubles, qui sont sur une conique le long de laquelle le plan est tangent à la surface.*

Le système linéaire des quadriques passant par six points servit à *R. Sturm,* puis à *V. Eberhard* pour définir une relation involutive, dans laquelle à chaque point P correspond un point Q qui forme avec P et les six points fixes un système de huit points associés[916]).

163. Système des premières polaires d'une surface du troisième ordre. Les premières polaires de tous les points de l'espace par rapport à une surface du troisième ordre forment un système linéaire particulier de quadriques à trois paramètres, dans lequel les droites doubles des dix couples de plans sont les arêtes d'un pentaèdre. La surface nodale est appelée la surface de Hesse ou de Steiner; elle a été l'objet des recherches de *J. Steiner*[917]), *R. Sturm*[918]) et *L. Cremona*[919]).

---

911) J. reine angew. Math. 105 (1889), p. 238.

912) Bull. sc. math. (2) 15 (1891), p. 308.

913) J. math. pures appl. (4) 9 (1893), p. 466.

914) *Proc. London math. Soc. (2) 1 (1904), p. 247/61.*

915) *Th. Reye,* J. reine angew. Math. 86 (1879), p. 97; **Th. Reye,* Geom. der Lage, (3e éd.) 3, p. 160; trad. *O. Chemin,* Géom. de position[207]) 2, p. 271.*

916) *R. Sturm,* Math. Ann. 1 (1869), p. 554; *V. Eberhard,* Diss Breslau 1885.

917) J. reine angew. Math. 53 (1857), p. 138; Werke 2, Berlin 1882, p. 656.

918) Flächen dritter Ordnung[175]), p. 127.

919) J. reine angew. Math. 68 (1868), p. 46.

W. Frahm[920]), *E. Toeplitz*[921]) et *H. Thieme*[922]) ont examiné dans quelles conditions un système linéaire général à trois paramètres était ce système particulier[923]).

164. Système linéaire de quadriques à trois paramètres ayant une ou deux droites communes. Quatre quadriques quelconques, qui passent par une même droite, définissent en général un système linéaire à trois paramètres; les quadriques du système qui passent par un point ont, en outre, en commun quatre points; celles qui passent par deux points ont en commun une cubique gauche [n° **154**]. La surface nodale est le lieu des droites doubles des couples de plans du système. Ce système a éte étudié par *R. Krause*[924]), *Th. Reye*[925]) et *J. Cardinaal*[926]).

Si les quadriques ont en commun deux droites, les plans polaires d'un point par rapport à toutes ces surfaces ont un point commun et la surface nodale est indéterminée. *R. Sturm*[927]) a considéré ce système comme celui des supports des systèmes réglés appartenant à une congruence de droites, tandis que *A. Rasche*[928]) l'a étudié comme système de quadriques[929]).

165. Système de quadriques à trois paramètres ayant une conique commune. La surface nodale (jacobienne) de quatre quadriques qui ont une conique commune se compose du plan de cette conique (compté deux fois) et d'une quadrique qui passe par la conique, ainsi que *Th. Reye*[930]) l'a établi.

Si le système est formé de sphères (congruence linéaire de sphères), au sens restreint du n° **170**), la jacobienne est la sphère orthogonale aux quatre sphères qui définissent le système[931]).

166. Quadriques ayant un tétraèdre conjugué commun. Toutes les quadriques conjuguées par rapport à un tétraèdre forment

920) Math. Ann. 7 (1874), p. 635.

921) Math. Ann. 11 (1877), p. 432.

922) Z. Math. Phys. 24 (1879), p. 221/76.

923) Cf. *Th. Reye,* Geom. der Lage[396]), (3e éd.) 3, p. 108; trad. *O. Chemin*[207]) 2, p. 217; *F. Schur,* Math. Ann. 18 (1881), p. 26; *H. Thieme,* Math. Ann. 28 (1887), p. 133.

924) Diss. Strasbourg 1879.

925) Geom. der Lage[396]), (3e éd.) 3, p. 168/74.

926) J. reine angew. Math. 111 (1893), p. 31.

927) Liniengeometrie[105]) 1, p. 252/4.

928) Z. Math. Phys. 20 (1875), p. 133.

929) *Th. Reye,* Geom. der Lage[396]), (3e éd.) 3, p. 211.

930) Id. (3e éd.) 3, p. 212.

931) *Th. Reye,* Synth. Geom. der Kugeln[342]), p. 5, 78; J. reine angew. Math. 99 (1886), p. 205.

un système linéaire à trois paramètres, dont la surface nodale se compose des plans des faces du tétraèdre. Ce système fut étudié par *L. F. Painvin*[932]), puis par *K. Meister*[933]).

H. E. Timerding[934]) a montré que, par une transformation quadratique, on peut transformer l'ensemble des plans de l'espace en un tel système de quadriques.

G. Darboux[935]) a montré que quatre quadriques n'ont pas en général d'hexaèdre conjugué commun, ni de pentaèdre conjugué commun.

Systèmes à plus de trois paramètres.

167. Définitions des systèmes ponctuels et tangentiels. *L. Cremona*[936]) a défini les systèmes de surfaces d'ordre n et a étudié quelques-unes de leurs propriétés; *Th. Reye*[937]) a considéré plus spécialement les systèmes ponctuels de quadriques.

L'ensemble de toutes les surfaces du second ordre

$$F = \sum_{i=1}^{i=4} \sum_{k=1}^{k=4} a_{ik} x_i x_k = 0$$

constitue un système linéaire ponctuel à neuf paramètres; de même, l'ensemble de toutes les surfaces de seconde classe

$$\Phi = \sum_{i=1}^{i=4} \sum_{k=1}^{k=4} \alpha_{ik} u_i u_k = 0$$

constitue un système linéaire tangentiel à neuf paramètres. Les auteurs allemands réservent le nom de *System* aux systèmes ponctuels et celui de *Gewebe* aux systèmes tangentiels.

Les dix coefficients a_{ik} ou α_{ik} peuvent être considérés comme coordonnées homogènes d'une surface du système ponctuel ou du système tangentiel.

Si les coefficients sont liés par p équations algébriques homogènes,

932) J. reine angew. Math. 63 (1864), p. 58.

933) Z. Math. Phys. 31 (1886), p. 321; 34 (1889), p. 6; cf. *Th. Reye,* Geom. der Lage[396]), (3e éd.) 3, p. 216; trad *O. Chemin*[207]) 2, p. 310.

934) Ann. mat. pura appl. (3) 1 (1898), p. 95.

935) Bull. sc. math. (1) 1 (1870), p. 357.

936) *L. Cremona*, Preliminari di teoria geom. superficie[879]), p. 36; trad. *M. Curtze,* p. 43; J. reine angew Math. 68 (1868), p. 11.

937) J. reine angew. Math. 82 (1877), p. 1. La notion générale de coordonnées est due à *J. Plücker,* d'après *F. Klein,* Höhere Geom.[104]) 1, p. 160, 230; *L. O. Hesse* [J. reine angew. Math. 45 (1853), p. 89; Werke, Munich 1897, p. 303] a le premier considéré un système d'équations linéaires entre les coefficients de l'équation d'une quadrique.

l'ensemble des surfaces correspondantes constitue un système de rang

$$9-p;$$

ce système est dit *linéaire*, quand les équations entre les coefficients sont linéaires; il est dit de degré g, quand il a en général g éléments communs avec un système linéaire de rang p, *c'est-à-dire que, si l'on adjoint aux p équations données un système de $9-p$ équations linéaires, le nombre des surfaces déterminées par cet ensemble d'équations est g.*

168. Systèmes linéaires ponctuels et tangentiels Un système linéaire de rang p peut être représenté par une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^{i=p} \lambda_i F_i = 0,$$

dans laquelle

$$F_0,\ F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_p$$

sont les premiers membres des équations

$$F_0=0,\ F_1=0,\ F_2=0,\ \ldots,\ F_p=0$$

de $p+1$ surfaces indépendantes et où

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_p$$

sont $p+1$ paramètres indépendants [n^{os} **149, 155**].

Dans un tel système, il y a en général une surface, et une seule, qui passe par p points donnés, *si le système est ponctuel; il y a en général une surface, et une seule, tangente à p plans donnés, si le système est tangentiel.*

G. Darboux[938]) a mentionné la courbe lieu des couples de points conjugués par rapport à toutes les quadriques d'un système linéaire ponctuel de rang quatre.

Th. Reye a étudié les systèmes linéaires dont le rang est égal à quatre, cinq, six, sept ou huit, et a mis en évidence les rapports qui existent entre leur théorie et celle de l'*apolarité*, en montrant qu'un système linéaire de quadriques de rang huit se compose de toutes les quadriques harmoniquement circonscrites à une quadrique donnée.

Th. Reye* appelle quadriques apolaires deux quadriques dont l'une est harmoniquement inscrite à l'autre; si F est harmoniquement inscrite à Φ, il dit que F *soutient ou porte* (stützt oder trägt) Φ [cf. n° **96].*

938) Bull. sc. math. (1) 1 (1870), p. 357; *Th. Reye,* J. reine angew. Math. 82 (1877), p. 1/54; *Th. Reye* [Geom. der Lage[164]), (4^e éd.) 1, p. 266/93] a également considéré des systèmes linéaires de cônes.

D'après *H. J. S. Smith*, il existe une seule quadrique harmoniquement inscrite à toutes les quadriques d'un système linéaire ponctuel de rang huit

$$\sum_{i=0}^{i=8} \lambda_i F_i = 0;$$

cette surface admet comme plans conjugués les deux plans d'un couple de plans faisant partie du système de rang huit[939]).

169. Système quadratique. *Th. Reye*[940]) a établi entre l'ensemble des quadriques F d'un espace à trois dimensions et l'ensemble des quadriques Φ d'un second espace à trois dimensions une correspondance univoque, en prenant pour coefficients de l'équation de la quadrique Φ des fonctions linéaires et homogènes de ceux de l'équation de la quadrique F.

De cette correspondance, il existe deux formes involutives, analogues l'une à la réciprocité polaire ordinaire et l'autre au système focal. Dans cette dernière correspondance, chaque quadrique F porte [n° **168**] la quadrique Φ qui lui correspond; dans la première correspondance, les quadriques F qui portent les quadriques Φ correspondantes forment un système quadratique de rang huit, de même que dans la réciprocité polaire ordinaire, les plans qui portent leur pôle enveloppent une quadrique [cf. n° **65**].

170. La sphère considérée comme élément de l'espace. La sphère peut être considérée comme élément de l'espace et cela de deux manières différentes.

On peut, en premier lieu considérer toutes les sphères de l'espace comme formant un *système linéaire* de rang quatre; c'est ce qu'a fait *Th. Reye*[941]). Si l'équation d'une sphère est, en coordonnées rectangulaires,

$$\varepsilon(x^2+y^2+z^2)-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+\delta=0,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont alors ce qu'on nomme les cinq coordonnées homogènes de la sphère.

939) Voir *H. J. S. Smith,* Philos. Trans. London 151 (1861), p. 301; Papers 1, Oxford 1894, p. 375; et ensuite *S. Gundelfinger*, Archiv Math. Phys. (3) 3 (1902), p. 309; (3) 4 (1903), p. 352.

940) J. reine angew. Math. 82 (1877), p. 173. Sur d'autres systèmes non linéaires de différents ordres, cf. J. reine angew. Math. 82 (1877), p. 8, 55, 59, 63.

941) Synth. Geom. der Kugeln[842]), p. 80. Pour les applications au complexe quadratique de sphères, cf. J. reine angew. Math. 99 (1886), p. 205. *Voir aussi *G. Loria,* Atti Accad. Torino 20 (1884/5), p. 505/26; Memorie Accad. Torino (2) 36 (1885), p. 199/297 [1884].*

En second lieu, on peut, avec *S. Lie*[942]), envisager l'espace sphérique comme un espace quadratique. Si l'on désigne par $\frac{\varrho}{\varepsilon}$ le rayon R de la sphère précédente, on a

$$\varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta\varepsilon;$$

on peut alors considérer les six quantités α, β, γ, δ, ε, ϱ liées par la relation précédente comme les six coordonnées homogènes de la sphère.

Le complexe linéaire général des sphères de la géométrie de la sphère de Lie

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta + E\varepsilon + R\varrho = 0$$

n'est autre chose que l'ensemble de toutes les sphères (en nombre infini de multiplicité trois) qui coupent une sphère donnée sous un angle constant φ.

Le complexe linéaire de *Th. Reye* ne comprend que les cas particuliers où

$$R = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

---

942) Math. Ann. 5 (1872), p. 145; *F. Klein,* Math. Ann. 5 (1872), p. 257; *S. Lie,* Theorie der Transformationsgruppen 3, Leipzig 1888, p. 138; *F. Klein,* Höhere Geom.[104]) 1, p. 208.

On trouvera des renseignements bibliographiques plus complets dans les articles III 7 et III 26.

ACHEVÉ D'IMPRIMER
EN NOVEMBRE 1992
PAR L'IMPRIMERIE
DE LA MANUTENTION
A MAYENNE
N° 305-92

Dépôt légal : Novembre 1992

Paul DU BOIS-REYMOND
• ▭ *Théorie générale des fonctions*

Jean-Baptiste DUMAS
• ▭ *Leçons sur la philosophie chimique*

Ernest DUPORCQ
• ▭ *Premiers principes de géométrie moderne*

Paul DUPUY
• *La vie d'Évariste Galois*

ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
Tout ce qui a paru de l'édition française rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules MOLK.
• ▭ *Arithmétique et Algèbre*
• ▭ *Analyse*
• ▭ *Géométrie*
• ▭ *Mécanique*
• ▭ *Physique*
• ▭ *Géodésie et Géophysique*
• ▭ *Astronomie*
• ▭ *Compléments*

F. G.-M. (Frère GABRIEL-MARIE)
• ▭ *Exercices de géométrie*
comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2.000 questions résolues
• ▭ *Exercices de géométrie descriptive*

Pierre FERMAT
• *Précis des Œuvres mathématiques et de l'Arithmétique de Diophante,* par Émile BRASSINNE

J. FITZ-PATRICK
• ▭ *Exercices d'arithmétiques*

Joseph FOURIER
• *Théorie analytique de la chaleur*

Maurice FRÉCHET
• *Les espaces abstraits*

Augustin FRESNEL
• *Mémoire sur la diffraction de la lumière*

Évariste GALOIS
• *Œuvres mathématiques*
suivies de
— *Influence de Galois sur le développement des mathématiques,* par Sophus LIE

Félix R. GANTMACHER
• *Théorie des matrices*

Carl Friedrich GAUSS
• *Recherches arithmétiques*

Francisco GOMES TEIXEIRA
• *Traité des courbes spéciales planes et gauches (3 tomes)*

Édouard GOURSAT
• ▭ *Cours d'Analyse mathématique (3 tomes)*

Édouard GRIMAUX
• ▭ *Lavoisier, 1743-1794*
d'après sa correspondance, ses manuscrits, ses papiers de famille et d'autres documents inédits

Jacques HADAMARD
• *Leçons de géométrie élémentaire (2 tomes)*
• *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*
suivi de
— *L'Invention mathématique,* par Henri POINCARÉ

Paul R. HALMOS
• *Introduction à la théorie des ensembles*

G. H. HARDY
• *Divergent Series* (en anglais)

Werner HEISENBERG
• *Les principes physiques de la théorie des quanta*

Hermann von HELMHOLTZ
• *Optique physiologique (2 tomes)*
• *Théorie physiologique de la musique*

David HILBERT
• *Sur les problèmes futurs des mathématiques (Les 23 Problèmes)*
• *Théorie des corps de nombres algébriques*

Camille JORDAN
• *Traité des substitutions et des équations algébriques*
• ▭ *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique (3 tomes)*

Erich KAMKE
• *Théorie des ensembles*

Stephen C. KLEENE
• *Logique mathématique*

Félix KLEIN
• *Le programme d'Erlangen*

Casimir KURATOWSKI
• ▭ *Topologie I et II*

Jean LADRIÈRE
• ▭ *Les limitations internes des formalismes*
Étude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements des mathématiques

Joseph-Louis LAGRANGE
• *Mécanique analytique*

Trajan LALESCO
• *La géométrie du triangle*

Pierre-Simon LAPLACE
• *Théorie analytique des probabilités (2 tomes)*
Le premier tome contient le célèbre *Essai philosophique sur les probabilités*

Pierre LAROUSSE
• ▭ *Jardin des racines grecques* (Livre du Maître)
suivi de
— *Jardin des racines latines* (Livre du Maître)

Antoine-Laurent LAVOISIER
• ▭ *Traité élémentaire de chimie*

Henri LEBESGUE
• *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*
• *Les coniques*
• *Leçons sur les constructions géométriques*

C. LEBOSSÉ & C. HÉMERY
• *Géométrie (classe de Mathématiques)*

Julien LEMAIRE
• ▭ *Étude élémentaire de l'hyperbole équilatère et de quelques courbes dérivées*
suivie de
— *Hypocycloïdes et épicycloïdes*

Tullio LEVI-CIVITA
• *Caractéristiques des systèmes différentiels et propagation des ondes*

Paul LÉVY
• ▭ *Calcul des probabilités*
• ▭ *Processus stochastiques et mouvement brownien*
• ▭ *Théorie de l'addition des variables aléatoires*
• ▭ *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*

Alexandre LIAPOUNOFF
• *Problème général de la stabilité du mouvement*

André LICHNEROWICZ
• *Éléments de calcul tensoriel*

Ernst LINDELÖF
• *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions*

Gérard de LONGCHAMPS
• ▭ *Cours de problèmes de géométrie analytique (3 tomes)*

Hendrik-Antoon LORENTZ
• ▭ *The Theory of Electrons and its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat* (en anglais)

Édouard LUCAS
• ▭ *Théorie des nombres*

Nicolas LUSIN
• ▭ *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*
suivies du Mémoire
— *Sur les fonctions représentables analytiquement,* par Henri LEBESGUE

Ernst MACH
• *La Mécanique*
Exposé historique et critique de son développement

James Clerk MAXWELL
• *Traité d'Électricité et de Magnétisme (2 tomes)*

Émile MEYERSON
• ▭ *La déduction relativiste*

Charles MICHEL
• ▭ *Compléments de géométrie moderne*
suivis du recueil des solutions des questions proposées
— *Exercices de géométrie moderne,* par Julien LEMAIRE

Abraham de MOIVRE
• *The Doctrine of Chances* (en anglais)

Gaspard MONGE
• *Géométrie descriptive.*
• *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie*

Pierre Rémond de MONTMORT
• *Essai d'analyse sur les jeux de hasard*

John von NEUMANN
• *Les fondements mathématiques de la Mécanique quantique*

Isaac NEWTON
• *Principes mathématiques de la philosophie naturelle (2 tomes)*

R. NOGUÈS
• ▭ *Théorème de Fermat. Son histoire*

Georges PAPELIER
• ▭ *Exercices de géométrie moderne précédés de l'exposé élémentaire des principales théories*
l'ouvrage comprend
I. Géométrie dirigée
II. Transversales
III. Division et faisceau harmonique
IV. Pôles, polaires, plans polaires, dans le cercle et la sphère
V. Rapport anharmonique
VI. Inversion
VII. Homographie
VIII. Involution
IX. Géométrie projective. Application aux coniques
• ▭ *Éléments de Trigonométrie sphérique*

Julius PETERSEN
• *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques*

Émile PICARD
• ▭ *Traité d'Analyse (3 tomes)*
• ▭ *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles*
suivies de
— *Leçons sur quelques équations fonctionnelles*
— *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*
— *Quelques applications analytiques de la théorie des courbes et des surfaces algébriques*

Johann Christian POGGENDORFF
• ▭ *Histoire de la physique*

Henri POINCARÉ
• *Calcul des probabilités*
• *La Mécanique nouvelle (Théorie de la Relativité)*
• *Théorie du potentiel newtonien*
• *Théorie des tourbillons*
• *Figures d'équilibre d'une masse fluide*
• *Électricité et Optique*
• ▭ *Théorie mathématique de la lumière*

Siméon-Denis POISSON
• *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*

George POLYA
• *Comment poser et résoudre un problème*

Alfred RÉNYI
• ▭ *Calcul des probabilités*
avec un appendice sur la théorie de l'information

Bernhard RIEMANN
• *Œuvres mathématiques*

F. RIESZ & B. SZ.-NAGY
• *Leçons d'analyse fonctionnelle*

Erwin SCHRÖDINGER
• *Mémoires sur la Mécanique ondulatoire*

Joseph-Alfred SERRET
• ▭ *Cours d'Algèbre supérieure (2 tomes)*
• ▭ *Traité de Trigonométrie rectiligne et sphérique*

Waclaw SIERPINSKI
• *250 problèmes de théorie élémentaire des nombres*
• ▭ *Leçons sur les nombres transfinis*

G. SINGIER
• ▭ *Les correspondances algébriques (1,1), (2,1), (2,2)*
Applications aux courbes et aux surfaces du deuxième et du troisième degré

Jean-Marie SOURIAU
• ▭ *Calcul linéaire*
La solution détaillée des exercices termine l'ouvrage

Paul TANNERY
• *Pour l'histoire de la science hellène*
• *La géométrie grecque*

François-Félix TISSERAND
• *Traité de Mécanique céleste (4 tomes)*
suivi de
— *Leçons sur la détermination des orbites*

Georges VALIRON
• *Équations fonctionnelles – Applications*

Vito VOLTERRA
• *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*

ÉDITIONS JACQUES GABAY

RÉIMPRESSIONS

Niels Henrik ABEL
• *Œuvres complètes (2 tomes)*
suivies de
— *Niels Henrik Abel – Sa vie et son action scientifique,*
par C.-A. BJERKNES

Jean D'ALEMBERT
• *Traité de dynamique*

André-Marie AMPÈRE
• *Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques*
• *Considérations sur la théorie mathématique du jeu*

Paul APPELL
• ▭ *Traité de Mécanique rationnelle (5 tomes en 3 vol.)*

Louis BACHELIER
• *Calcul des probabilités*
• *Les lois des grands nombres du calcul des probabilités*
suivies de
— *La spéculation et le calcul des probabilités*
— *Les nouvelles méthodes du calcul des probabilités*
• ▭ *Le Jeu, la Chance et le Hasard*
• *Collection de Mémoires*
titres inclus
— *Théorie de la spéculation*
— *Théorie mathématique des jeux*
— *Théorie des probabilités continues*
— *Les probabilités à plusieurs variables*
— *Mouvement d'un point ou d'un système soumis à l'action des forces dépendant du hasard*
— *Les probabilités cinématiques et dynamiques*

René BAIRE
• *Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité*

W. W. Rouse BALL
• ▭ *Récréations mathématiques*
• ▭ *Histoire des mathématiques*

Stefan BANACH
• ▭ *Théorie des opérations linéaires*

Paul BARBARIN
• *La Géométrie non euclidienne*

Edmond BAUER
• *Introduction à la théorie des groupes et à ses applications à la physique quantique*

Jacques BERNOULLI
• *L'art de conjecturer*
Cette première partie de l'*Ars Conjectandi* (la traduction française des parties 2, 3 et 4 n'a jamais paru) contient le célèbre *Traité de la manière de raisonner dans les jeux de hasard,* par Christiaan HUYGENS

Joseph BERTRAND
• ▭ *Calcul des probabilités*

Marcel BOLL
• ▭ *La chance et les jeux de hasard*
• ▭ *Le mystère des nombres et des formes*

Ludwig BOLTZMANN
• *Leçons sur la théorie des gaz*

Émile BOREL
• *Leçons sur les séries divergentes*

Émile BOREL & André CHÉRON
• ▭ *Théorie mathématique du bridge à la portée de tous*
suivie de
— *Applications de la théorie des probabilités aux jeux de hasard,* par Émile BOREL & Jean VILLE
— *Valeur pratique et philosophie des probabilités,* par Émile BOREL

Pierre BOUTROUX
• ▭ *L'idéal scientifique des mathématiciens*

Léon BRILLOUIN
• *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*
• *La science et la théorie de l'information*

Louis de BROGLIE
• *Ondes et mouvements*

Georg CANTOR
• *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis*

Sadi CARNOT
• *Réflexions sur la puissance motrice du feu*

Élie CARTAN
• *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*
• ▭ *Leçons sur la géométrie projective complexe*
suivies de
— *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*
— *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*

Augustin-Louis CAUCHY
• *Analyse algébrique*

Michel CHASLES
• *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*
• *La dualité et l'homographie*
• *Rapport sur les progrès de la géométrie*

Rudolph CLAUSIUS
• ▭ *Théorie mécanique de la chaleur*

H. COMMISSAIRE & G. CAGNAC
• *Cours de Mathématiques spéciales (3 tomes)*

Antoine-Nicolas de CONDORCET
• *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*

Gaspard-Gustave CORIOLIS
• *Théorie mathématique des effets du jeu de billard*
suivie des deux célèbres Mémoires
— *Sur le principe des forces vives dans les mouvements relatifs des machines*
— *Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps*

Gaston DARBOUX
• ▭ *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal (4 tomes)*
• ▭ *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*
• ▭ *Principes de géométrie analytique*

R. DELTHEIL & D. CAIRE
• *Géométrie*
suivie de
— *Compléments de géométrie*

G. DEMARTRES
• ▭ *Cours de géométrie infinitésimale*

René DESCARTES
• *La Géométrie*

Paul A.M. DIRAC
• *Les principes de la Mécanique quantique*

▭ = ▭blong®

(Suite à l'intérieur)

Diffusion-Distribution : JACQUES GABAY
151 bis, rue Saint-Jacques 75005 PARIS
Tél. (1) 43 54 64 64 – Fax : (1) 43 54 87 00

ISBN 2-87647-113-2
ISSN 0989-0602

▭blong®